MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS PÉNALISÉS (H3, J1)
(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit :

(1) $y_n = \rho(x_n) + u_n, \quad \forall n \in N_N^*$,

un **modèle de régression** (non linéaire), basé sur une **fonction de régression** ρ, et dans lequel les y_n et les x_n sont des **vars** supposées **observables**. On suppose aussi que $a \leq x_1 < ... < x_N \leq b$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, et que $(u_n)_{n=1,...,N}$ est une **suite iid** tq :

(2) $E\, u_n = 0$ et $V\, u_n = \sigma^2, \quad \forall n \in N_N^*$.

On remplace souvent (2) par l'hypothèse plus étroite :

(2)' $u_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Dans ce **contexte**, on appelle **méthode des moindres carrés pénalisés** une méthode d'estimation de φ à l'aide de la solution (en ρ) du **problème d'optimisation** suivant (cf **estimateur spline de la régression**) :

$$(3) \quad \begin{cases} \min \Sigma_{n=1}^{N} (y_n - \rho(x_n))^2 \\ \text{sous } \int \mathbf{1}([a, b]) \,.\, \{\rho''(x)\}^2\, dx \leq c \qquad (\textbf{pénalisation}), \end{cases}$$

dans lequel c est une **constante** donnée, $\mathbf{1}(B) = \mathbf{1}_B$ est l'**indicatrice** d'une **partie** $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ (**tribu des boréliens** de **R**) et ρ'' la **dérivée** seconde de ρ (cf **dérivation**).

(ii) La méthode consiste ainsi à choisir un estimateur de ρ qui concilie à la fois :

(a) une bonne **adéquation** (au sens des moindres carrés) de ρ pr aux **données** $(x_n, y_n)_{n=1,...,N}$;

(b) et une **variation locale moyenne** (sous forme de **courbure moyenne**) minimale.

La solution de (3) est aussi appelée **estimateur par lissage spline** de la régression. On peut la calculer à l'aide des multiplicateurs de LAGRANGE du problème de **calcul des variations** (3) (cf **programmation mathématique**, **lagrangien**).

(iii) Lorsque les données sont des **séries temporelles**, l'estimation du **paramètre secondaire** σ^2 (cf aussi **paramètre principal**) s'effectue généralement après élimination de la **tendance** de la série $(y_n)_{n=1,...,N}$.

Un estimateur possible de σ^2 est alors :

(4) $\quad (s^2)^{\sim} \;=\; \{2\,.\,(N-1)\}^{-1}\,.\,\Sigma_{n=2}^{N}\,(y_n^{\sim} - y_{n-1}^{\sim})^2,$

où $(y_n^{\sim})_{n=1,\ldots,N}$ est la série corrigée d'une éventuelle tendance.