

MÉTHODE DES SCORES (G, H3)

(18 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **méthode des scores** est une méthode d'**approximation** numérique de type I. NEWTON - W. RAPHSON qui permet eg de calculer l'**estimateur du maximum de vraisemblance** lorsque les conditions du premier ordre sont non linéaires ou n'en permettent pas un calcul simple.

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle image** dans lequel $\Theta \subset \mathbf{R}$ et dont la **vraisemblance** est :

$$(1) \quad L(x, \theta) = dP_\theta^X(x) / d\mu(x),$$

où μ est une **mesure positive** σ -finie dominant la famille $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ (cf **famille de lois dominée, mesure σ -finie**).

On appelle **score (efficace)** du (ou pour le) **paramètre** θ la deuxième application partielle S_x de la fonction :

$$(2) \quad (x, \theta) \mapsto D_2 \ln L(x, \theta) = S(x, \theta),$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien et D_2 la **dérivation** pr au second argument (**dérivée partielle**). Sous des **conditions de régularité** classiques (cf **méthode du maximum de vraisemblance**), l'estimateur du mv est solution de l'**équation estimante** (condition du premier ordre) :

$$(3) \quad S_x(\theta) = 0.$$

(ii) Soit $\theta_0 \in \Theta$ une valeur donnée (**valeur d'amorçage**) du paramètre. La **méthode des scores de R.A. FISHER** est une méthode itérative qui procède comme suit :

(a) calcul du développement de TAYLOR d'ordre 1 de S_x au voisinage de la valeur θ_0 (cf **formule de TAYLOR stochastique**) :

$$(4) \quad S_x(\theta) = S_x(\theta_0) + D_2 S_x(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0) + o(\theta - \theta_0),$$

d'où la condition du premier ordre :

$$(5) \quad S_x(\theta) = S_x(\theta_0) - I(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0) + o(\theta - \theta_0) = 0,$$

dans laquelle $I(\theta_0) = -D_2 S_x(\theta_0) = -D_2 \ln L(x, \theta)$ est la valeur de la quantité d'**information de FISHER** au point θ_0 et o désigne petit zéro (en probabilité) (cf **ordres de convergence en probabilité**).

En négligeant le reste $o(\theta - \theta_0)$, la solution de (5) s'écrit :

$$(6) \quad \theta_1 = \theta_0 + \{S_x(\theta_0) / I(\theta_0)\};$$

(b) calcul du développement de TAYLOR d'ordre 1 de S_x au voisinage de θ_1 , et répétition de la démarche précédente ;

(c) itération des calculs précédents jusqu'à convergence numérique des valeurs (« estimations » numériques) successives $\theta^{(p)}$, compte tenu d'un **seuil de précision** relative $\varepsilon > 0$ donné a priori. Autrement dit, les itérations s'arrêtent à l'indice p^* dès que $|\theta^{(p^*)} - \theta^{(p^*-1)}| < \varepsilon$.

Si $S = s(X)$ est une **statistique** donnée, et si g désigne la **densité** de sa loi P^S , alors sa **fonction score** S_s s'écrit :

$$(7) \quad S_s(\theta) = D_2 \ln g(s, \theta) = E_\theta(S_X(\theta) / S = s),$$

donc peut se représenter en fonction de celle S_x de X .

(iii) La méthode des scores s'étend directement au cas où $\theta \in \Theta$ est un paramètre vectoriel réel (ie $\Theta \subset \mathbf{R}^Q$) ou à une fonction $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}^Q$ définissant un nouveau paramètre $\tau = g(\theta)$ (cf **paramétrisation**).