MÉTHODE DES VARIABLES INSTRUMENTALES (H3, J1)
(27 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **méthode des variables instrumentales** peut être présentée dans le cadre d'une **représentation statistique**. Lorsque certaines hypothèses usuelles ne sont pas vérifiées, cette méthode générale d'**estimation** d'un **modèle statistique** remplace des variables par d'autres qui leur sont (asymptotiquement) corrélées. Ces dernières variables jouent le rôle d'**instrument** apte à réaliser l'estimation recherchée.

(i) La méthode est notamment utilisée dans l'étude du **modèle de régression**. Ainsi, dans le cadre du **modèle de régression linéaire** multiple (écrit dans l'**espace des observations** $\mathbf{R}^N$) :

(1) $\quad y = X b + u, \qquad$ avec $E u = 0, V u = \Sigma,$

soit $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_L)$ une liste de variables considérées comme exogènes, et appelées **variables instrumentales** ou **instruments** (**d'estimation**).

On suppose qu'il existe une (N,L)-**matrice d'observation** Z de ζ tq (**convergence en probabilité**) :

$$\text{(2)} \quad \begin{aligned} &\text{P-lim}_N \ (N^{-1} Z' \Sigma^{-1} u) = 0, \\ &\text{P-lim}_N \ (N^{-1} Z' \Sigma^{-2} Z) < \infty, \\ &\text{P-lim}_N \ (N^{-1} Z' \Sigma^{-1} X) < \infty, \\ &\text{rg} (Z' \Sigma^{-2} Z) = K \ \text{ et } \ \text{rg} (Z' \Sigma^{-1} X) = K \ \text{ (P-p.s.).} \end{aligned}$$

La **méthode des variables instrumentales** consiste à estimer b à l'aide de l'**estimateur ponctuel** :

(3) $\quad b_{Z,N}^{\wedge} = (Z' \Sigma^{-1} X)^{-1} Z' \Sigma^{-1} y,$

ie en utilisant l'**équation instrumentale**, ou **équation aux instruments** :

(4) $\quad Z' \Sigma^{-1} y = Z' \Sigma^{-1} X b + Z' \Sigma^{-1} u,$

au lieu des **équations normales** usuelles déduites de (1), et à « négliger » le dernier terme (pour tenir compte de l'une des hypothèses (2)), ce qui conduit à l'**équation estimante** :

(5) $\quad Z' \Sigma^{-1} y = Z' \Sigma^{-1} X b.$

L'estimateur défini en (3) est solution de (5).

En particulier, si L = K et Z = X, on obtient l'**estimateur des moindres carrés généralisés** usuel, ainsi que la méthode d'estimation correspondante.

(ii) On montre que, dans le modèle de régression précédent :

(a) $b_{Z,N}^{\wedge}$ est un **estimateur convergent** de b, ie :

(6) $\quad \text{P-lim}_N \; b_{Z,N}^{\wedge} = b$;

(b) $b_{Z,N}^{\wedge}$ admet pour **variance** asymptotique (conditionnelle à (X, Z)) la **matrice** :

(7) $\quad V_\infty \, b_{Z,N}^{\wedge} = \text{P-lim}_N \, (V \, b_{Z,N}^{\wedge}) = (Z' \, \Sigma^{-1} \, X)^{-1} \, (Z' \, \Sigma^{-1} \, Z) \, (X' \, \Sigma^{-1} \, Z)^{-1}$.

(iii) La méthode s'applique aussi au problème d'estimation d'un **modèle d'interdépendance** : ainsi, la **méthode des moindres carrés ordinaires**, la **méthode des moindres carrés indirects**, la **méthode des doubles moindres carrés** et la **méthode des triples moindres carrés** sont des méthodes de variables instrumentales.