MODE (C5, F3)
(19 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

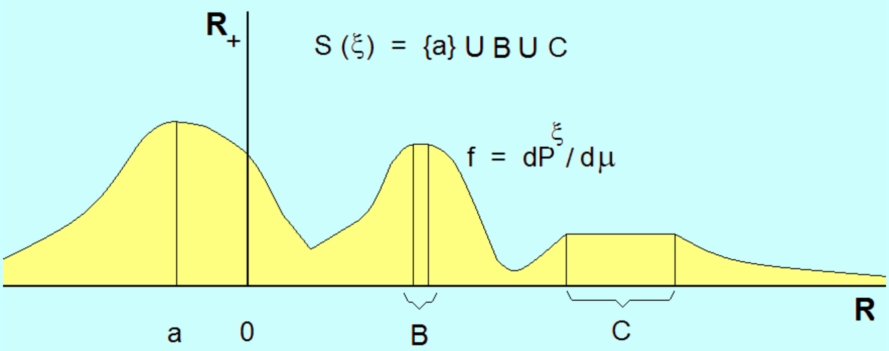
La notion de **« valeur la plus probable »** pour une **va**, pour une **statistique** ou pour un **paramètre** est à l'origine des concepts de **maximum de vraisemblance** ou de **régression modale** (cf aussi **régression**). Il existe un concept analogue pour une **loi de probabilité**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire** réel de loi P^ξ. On suppose que P^ξ admet pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_K une **densité** (ou **dérivée de NIKODYM-RADON**) $f = d^\xi / d\lambda_K$ (**modèle dominé**).

On appelle **partie modale**, ou **ensemble modal**, associé(e) à P^ξ (resp à ξ, resp à f) une **partie** $S(\xi) \subset \mathbf{R}^K$ tq f prend sa valeur maximale (maximum absolu) en tout point de $S(\xi)$, ie tq (cf schéma ci-après) :

(1) $S(\xi) = \{x \in \mathbf{R}^K : f(x) \geq f(y),\ \forall y \in \mathbf{R}^K\}$.

représentation graphique d'un ensemble modal (K = 1)



On appelle **valeur modale** de P^ξ (resp de ξ, resp de f) tout point de $S(\xi)$.

Si Card $S(\xi) = 1$ (ie si $S(\xi)$ se réduit à un seul point de $\mathbf{R}^K$), noté $S\,\xi$ (ou $S(\xi)$, ou Mo (ξ), etc), on l'appelle **mode**, ou **valeur modale**, ou **valeur la plus probable**, ou encore **valeur dominante** (en probabilité), associée à P^ξ (resp à ξ, resp à f). Dans ce cas, ξ (resp P^ξ, resp f) est dite **variable unimodale** (resp **loi unimodale**, resp **densité unimodale**).

(ii) Les notions d'ensemble modal, de valeur modale et de mode précédentes sont des notions absolues : on parle alors eg de **mode absolu**.

On définit aussi un **ensemble modal (relatif)** de P^ξ (resp de ξ, resp de f) comme partie $S^*(\xi) \subset \mathbf{R}^K$ tq f prend une valeur maximale (ie possède un maximum relatif) en tout point d'une partie stricte $B \subset$ Supp f qui vérifie $S^*(\xi) \subset B$ (cf **support d'une fonction**). Si Card $S^*(\xi) = 1$, l'élément $S^*\,\xi \in S^*(\xi)$ est dit **mode relatif** de ξ (resp de P^ξ, resp de f).

Une **variable** ξ (resp **une loi** P^{ξ}, resp une **densité** f) possédant plusieurs modes (relatifs) est appelée **variable multimodale** (resp **loi multimodale**, resp **densité multimodale**). Cette situation est fréquente dans le cas où P^{ξ} est un **mélange de lois**.

(iii) Si f est différentiable (cf **différentiabilité**), un **mode (relatif)** de P^{ξ} (resp de ξ, resp de f) est solution de l'équation :

(2) $D\, f\, (x)$ ou $f\,'(x) = 0.$

Si P^{ξ} admet une **fr** F deux fois différentiable, un **mode (relatif)** est solution de l'équation :

(3) $D^2\, F\, (x)$ ou $F\,''\,(x) = 0.$

(iv) Les notions précédentes sont théoriques. Si $X = (X_1 ,..., X_N)$ est un **échantillon iid** constitué de **vecteurs aléatoires** indépendants et équidistribués selon P^{ξ}, on peut définir une notion de **valeur modale empirique** :

(a) soit à partir d'un **histogramme**, associé à la **fr empirique** F_N définie par X, et d'une **partition** de $\mathbf{R}^K$;

(b) soit lorsque K = 1, à partir de la fr empirique F_N définie par X. La valeur en question peut alors être définie comme point d'inflexion de la ligne brisée joignant les points $(X_n , F_N (X_n))$, où $n \in N_N$*.

(v) On montre que :

(a) Si f est unimodale de mode $S\,\xi$ (cf **loi unimodale**), si X est un **échantillon iid** selon P^{ξ} et si $f_N^{\sim}$ est l'**estimateur de la densité** f obtenu par la **méthode du noyau**, alors le mode S_N de $f_N^{\sim}$ constitue un estimateur de $S\,\xi$. Sous les conditions du **théorème de NADARAYA**, on a (**convergence presque sûre**) :

(4) $S_N \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} S\,\xi$ (P-p.s.) ;

(b) La convergence presque sûre précédente est encore vraie (sous des hypothèses ad hoc) si f est estimée par la **méthode des fonctions orthogonales** ;

(c) si f est unimodale de mode $S\,\xi$ et si $\xi \in L_{\mathbf{R}}^2\,(\Omega, \mathscr{T}, P)$, alors :

(4) $(S\,\xi - E\,\xi)^2 \leq 3 \,.\, V\,\xi.$

(vi) Le mode se définit de façon analogue pour une **loi discrète** P^{ξ} (ie admettant une densité f par à une **mesure discrète**) ou, plus généralement, pour une loi P^{ξ} admettant une densité f pr à une **mesure positive** μ définie sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}^K)$, la définition initiale s'appliquant alors.

(vii) La notion de mode concernait des **variables quantitatives** (variables numériques).

Elle peut aussi se définir pour une **variable qualitative**. Ainsi, si (Ω, $\mathscr{T}$, P) est un **espace probabilisé**, ($\mathscr{K}$, $\mathscr{C}$) un **espace probabilisable** (**espace d'observation**) tq $\mathscr{K}$ = $(k_m)_{m \in \mathbf{N}^*}$ est un ensemble (au plus) dénombrable de **modalités** et $\kappa : \Omega \mapsto \mathscr{K}$ une **va** qualitative (simple), l'**ensemble modal** (resp le **mode**) de P^κ (ou de κ) est l'ensemble des éléments S_κ de $\mathscr{K}$ correspondant aux plus fortes probabilités (resp à la plus forte probabilité) P ([$\kappa = k_m$]).

La notion peut alors s'étendre à un G-uple de variables qualitatives.

(viii) La notion de mode peut être définie à partir de la loi P^ξ elle-même.

Une **partie modale** associée à P^ξ est alors une partie S (ξ) $\subset \mathbf{R}^K$ tq :

(5) $\quad P^\xi (S (\xi)) = \sup \{P^\xi (B) : \forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^K)\}$,

où $\mathscr{B}(\mathbf{R}^K)$ désigne la **tribu borélienne** de $\mathbf{R}^K$.

S (ξ) peut ne pas être une partie « régulière » de $\mathscr{B}(\mathbf{R}^K)$ ou de $\mathbf{R}^K$: **partie compacte**, **partie connexe**, **partie convexe**, etc.

(ix) Dans certains **situations statistiques**, il peut être nécessaire de tester si une loi de probabilité est une **loi unimodale**, eg pour détecter un **mélange légal** (cf **test d'unimodalité**).