MODÈLE AVEC COEFFICIENTS VARIABLES (J9, N)
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un modèle à coefficients variables est un **modèle** dans lequel certains **paramètres** peuvent dépendre :

(a) soit de l'**indice** des **observations** : eg l'**unité statistique** s'il s'agit d'un modèle avec **données** individuelles, le **temps** s'il s'agit d'un modèle avec données temporelles, l'**espace** s'il s'agit d'un modèle avec données spatiales, etc ;

(b) soit des valeurs des observations elles-mêmes (cf aussi **modèle à structure variable**).

(i) Ainsi, dans le cas où les paramètres dépendent des indices d'observations, un **modèle statistique** $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ paramétré par Θ est appelé **modèle à coefficients variables** ssi :

(a) l'**espace d'observation** $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ est de la forme $(\Pi_{t \in T} \mathscr{X}_t , \otimes_{t \in T} \mathscr{B}_t)$, et X est un **processus** $(X_t)_{t \in T}$ dans lequel T représente l'indice des observations. Le plus souvent, on considère un **espace puissance**, ie tq $\mathscr{X}_t = \mathscr{X}_0$ (fixé) et $\mathscr{B}_t = \mathscr{B}_0$ (fixé) ;

(b) l'ensemble Θ des valeurs du **paramètre** θ dépend de t, ie : Θ est noté Θ_t et θ est noté θ_t , avec $t \mapsto \theta(t) = \theta_t$. On peut ainsi écrire $\theta_t \in \Theta_t$, $\forall t \in T$. Par suite, on note $P_{\theta(t)}^{X(t)}$, , et l'on considère que chaque **loi** P_θ^X du modèle est définie à partir de ses projections élémentaires (ie **lois marginales**) $P_{\theta(t)}^{X(t)}$, $\forall t \in T$ (où l'exposant X(t) désigne, par commodité, la variable X_t et l'indice $\theta(t)$ désigne θ_t).

Dans le cas où le paramètre dépend des observations elles-mêmes, les **lp** ont la même forme précédente, mais avec $\theta_t = f_t(X_t)$, $\forall t \in T$.

(ii) Des modèles de ce type interviennent lorsqu'on cherche à modéliser de façon « variable » ou « glissante » (eg au cours du temps) certains **phénomènes** réels (cf **catastrophe**).

Leur traitement statistique fait intervenir la notion de **mélange de lois**, ou celle de **paramètre incident**. Il dépend aussi de la façon dont les relations $t \mapsto \theta_t$ (resp $X_t \mapsto \theta_t$) sont spécifiées.

(iii) Le **modèle de T.F. COOLEY - E.C. PRESCOTT** est un exemple de modèle à coefficients variables (eg en temps discret, avec $t \in N_T^*$) de la forme :

$$y_t = X_t b_t ,$$

(1) $$b_t = b_{t-1} + v_t ,$$

$$b_t = b_t^* + w_t ,$$

dans laquelle (X_t , y_t) est la t-ième observation d'un **couple aléatoire** (ξ, η) constitué d'un vecteur ξ comportant K **vars** exogènes et d'une vars endogène η (cf **variable exogène**, **variable endogène**).

On adjoint à (1) des « **hypothèses stochastiques** » tq les suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} v_t \sim \mathcal{N}_K (0, \lambda \, \sigma_u^2 \, \Sigma_v) \text{ (loi normale multidimensionnelle centrée),} \\ w_t \sim \mathcal{N}_K (0, (1 - \lambda) \, \sigma_u^2 \, \Sigma_w), \end{cases}$$

où (dans les cas simples) le paramètre $\lambda \in [0, 1]$ du « mélange » est seul inconnu.

Le modèle {(1),(2)} précédent peut alors s'écrire sous la forme compacte :

$$(3) \quad \begin{cases} y = X b + u, \\ u \sim \mathcal{N}_T (0, \sigma_u^2 \, \Omega), \end{cases}$$

avec $\Omega = \lambda \, Q + (1 - \lambda) \, R$, où Q et R sont des **matrices** connues.

L'**hypothèse** de constance des coefficients H_0 : $b_t = b_0$, $\forall$ t $\in$ T, peut être testée. Ceci revient à tester l'**hypothèse de base** :

(4) H_0' : $\lambda = 0$.

En effet, cette dernière implique $v_t \sim \delta_0$ (**loi de DIRAC** placée à l'origine), donc implique H_0 presque sûrement (ie $b_t = b_{t-1}$, $\forall$ t, p.s.).