MODÈLE D'INTERDÉPENDANCE DYNAMIQUE (J1, N)
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

On appelle **modèle d'interdépendance dynamique** un **modèle d'interdépendance** qui est, en même temps, un **modèle dynamique** (cf **classification des modèles**) : ce modèle comporte, parmi les variables « exogènes », des valeurs « retardées » des variables endogènes, aussi appelées « variables prédéterminées ».

(i) Soit ξ un **vecteur aléatoire** comportant K **variables exogènes** (véritables), η un vecteur aléatoire comportant G **variables endogènes**, ε un vecteur comportant G **perturbations aléatoires** inobservables, B l'opérateur retard (cf **opérateur avance**) et F_{ij} ainsi que H_{ij} des polynômes formels de degrés resp $r_{ij} = d° F_{ij}$ et $s_{ij} = d° H_{ij}$, $\forall$ (i, j) $\in N_2^* \times N_2^*$.

On appelle **modèle d'interdépendance dynamique (linéaire)** un **modèle à équations simultanées** pouvant se mettre sous la forme suivante, dite **forme structurelle** (de M.H. QUENOUILLE - A. ZELLNER), exprimée dans l'**espace de variables** :

$$(1)\quad \begin{cases} F_{11}(B)\,\eta + F_{12}(B)\,\xi = H_{11}(B)\,\varepsilon_1 + H_{12}(B)\,\varepsilon_2 , \\ F_{21}(B)\,\eta + F_{22}(B)\,\xi = H_{21}(B)\,\varepsilon_1 + H_{22}(B)\,\varepsilon_2 , \end{cases}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_1 , \varepsilon_2)$ représente la perturbation d'ensemble.

Le caractère exogène (resp endogène) de ξ (resp de η) implique habituellement les restrictions suivantes :

(2) $\quad F_{21} = 0, \qquad H_{12} = 0, \qquad H_{21} = 0 \qquad$ (polynômes nuls).

Par suite, (1) s'écrit souvent sous la **forme structurelle simplifiée** :

$$(3)\quad \begin{cases} F_{11}(B)\,\eta + F_{12}(B)\,\xi = H_{11}(B)\,\varepsilon_1 , \\ F_{22}(B)\,\xi = H_{22}(B)\,\varepsilon_2 . \end{cases}$$

Dans la première équation de (3), ξ est constitué des **variables prédéterminées**, ie des variables exogènes véritables et des **variables endogènes retardées**. Par suite, F_{11} (B) n'est pas une fonction matricielle impliquant des valeurs retardées pour η, mais simplement une **matrice** contenant les paramètres associés à η. Ceci constitue la **forme réduite** du modèle. Si l'on calcule η en fonction de (ξ, ε_1) directement à partir de la première équation de (3), on obtient la **forme finale** du modèle (A.S. GOLDBERGER), ie :

$$(4)\quad \eta = - F_{11}^{-1}(B)\,F_{12}(B)\,\xi + F_{11}^{-1}(B)\,H_{11}(B)\,\varepsilon_1 .$$

Si $F_{11}^* = \text{Com } F_{11}$ est la **comatrice** (ie la matrice des cofacteurs) associée à F_{11} , ie si $F_{11}^{-1} = F_{11}^* / \text{Dét } F_{11}$, on peut réécrire (4) sous une forme voisine, couramment appelée (lorsque les données sont des **séries temporelles**) **fonction de transfert** du modèle, ie :

(5) $(\text{Dét } F_{11})\, \eta \;=\; - F_{11}^* (B)\, F_{12} (B)\, \xi + F_{11}^* (B)\, H_{11} (B)\, \varepsilon_1$,

système dont la g-ième équation peut se mettre, lorsque ξ ne comporte qu'une seule coordonnée (ie une seule variable exogène pure), sous la forme scalaire :

(6) $\Phi (B)\, \eta_g \;=\; \Psi (B)\, \xi + \varphi$.

Diverses méthodes (eg **méthodes de BOX-JENKINS**) permettent d'estimer l'équation (6).

(ii) La notion de modèle d'interdépendance dynamique peut aussi être présentée comme suit, où l'opérateur retard est noté L. La **forme structurelle** (toujours supposée linéaire) du modèle s'écrit :

(7) $B (L)\, \eta + C (L)\, \xi \;=\; \varepsilon$,

dans laquelle B et C sont des fonctions polynômiales matricielles associées resp à η et à ξ, ε un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^G$ dont les **copies** constituent un **processus** $(u_t)_{t=1,\dots,T}$, η le vecteur des G variables endogènes, dont les observations constituent un processus $(y_t)_{t=1,\dots,T}$, et ξ le vecteur des K variables exogènes, dont les observations sont notées $(x_t)_{t=1,\dots,T}$. On suppose généralement que $(u_t)_{t=1,\dots,T}$ est un **processus stationnaire en covariance**.

On peut écrire :

(8) $B (L) \;=\; \Sigma_{i=0}^{I} B_i\, L^i$, $\qquad C (L) \;=\; \Sigma_{j=0}^{J} C_j\, L^j$.

Comme pour le **modèle d'interdépendance linéaire** usuel (alors parfois appelé **modèle d'interdépendance statique**), le modèle dynamique (7) est appelé **modèle simple**, ou **modèle complet**, car il comporte autant d'équations que de variables endogènes (cf **modèle complet**).

On lui impose, en outre, la **règle de normalisation** suivante :

(9) $b_{0,gg} \;=\; 1, \qquad \forall\, g \in N_G^*$,

où l'on note $B_0 = (b_{0,gh})_{(g,h)}$.

De plus, on suppose qu'il s'agit d'un **modèle stable**, ie que les racines de la fonction $z \mapsto \text{Dét } (B (z))$ dans le plan complexe $\mathbf{C}$ sont de module (strictement) supérieur à 1.

Par suite, on définit la **forme réduite** du modèle (7) selon :

(10) $\eta \;=\; - B_0^{-1} \{B (L) - B_0\}\, \eta - B_0^{-1}\, C (L)\, \xi + B_0^{-1}\, \varepsilon$,

et sa **forme finale**, dans laquelle η s'exprime (par définition) en fonction des valeurs retardées des seuls vecteurs ξ et ε, s'écrit :

(11) $\eta \;=\; - \{B (L)\}^{-1}\, C (L)\, \xi + \{B (L)\}^{-1}\, \varepsilon$.

Enfin, si Com B (L) désigne la comatrice de B (L), les **équations finales** du modèle dérivent directement de (11) selon :

(12) $\{\text{Dét } B(L)\}\, \eta = - \{\text{Com } B(L)\}\, C(L)\, \xi + \{\text{Com } (B(L)\}\, \varepsilon.$

(iii) On peut écrire des équations analogues aux précédentes pour chacune des N observations $(X_n , Y_n)_{n=1,\dots,N}$ de (ξ, η).

On suppose que le vecteur η des G variables endogènes est observé selon un processus $(y_t)_{t=1,\dots,T}$, et le vecteur ξ des K variables exogènes selon un processus $(x_t)_{t=1,\dots,T}$.

Enfin, on suppose disponibles des **copies** du vecteur aléatoire ε à valeurs dans $\mathbf{R}^G$. Ces copies constituent un **processus** $(u_t)_{t=1,\dots,T}$ qui est un **processus stationnaire en covariance**.

C'est sur la base de ces équations que l'**inférence statistique** est réalisée.