MODÈLE DYNAMIQUE (J, N)
(08 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

En prenant progressivement conscience de sa propre « existence » (physique, biologique, etc), l'**Homme** a pris conscience de l'existence d'un univers ambiant. C'est avec l'**observation** de cet environnement que la notion (perçue, puis physique) de **temps** a pu historiquement émerger. En effet, dans tous les **domaines de connaissance**, les **phénomènes** étudiés se déroule au cours du temps, même si leur « composante » spatiale joue un rôle spécifique : l'existence d'un temps (durée, histoire) sans espace est difficile à concevoir, de même que celle d'un espace sans temps.

Considéré comme mandataire de l'Homme, l'**homme de l'art** a progressivement été conduit à concevoir les importantes notions de **statique**, d'**évolution** et de **dynamique**.

D'autres notions, connexes mais fondamentales, ont été conçues et distinguées : **enchaînement**, **irréversibilité**, **hystérésis**, **catastrophe**, etc.

Le **temps** intervient ainsi très souvent dans la conception d'un **modèle statistique** : les **variables** de ce modèle peuvent, ou doivent, alors être « indexées » par ce dernier (cf **indice**). Autrement dit, les **lois de probabilité** sensées gouverner les phénomènes considérés sont des lois relatives à des variables indexées par le temps (cf aussi **loi multivariée**).

Le **statisticien** est donc naturellement conduit à prendre en compte chacune de ces variables sous la forme d'un **processus stochastique**.

(i) Soit ($\mathcal{Z}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}^{Z}$) un **modèle de processus** dans lequel (en supposant licites toutes les opérations concernées) :

(a) Z = (X, Y) est un processus composé :

(a)$_1$ d'un processus (multivarié) $X = (X_t)_{t \in T}$ comportant K **variables exogènes**, à valeurs dans un **ensemble** $\mathcal{X}$;

(a)$_2$ d'un processus (multivarié) $Y = (Y_t)_{t \in T}$ comportant G **variables endogènes**, à valeurs dans un ensemble $\mathcal{Y}$;

(b) T est un ensemble appelé **ensemble** du (des) **temps** commun(s) aux processus. Il peut représenter une **échelle** de temps « intrinsèque » des processus (temps physique), une échelle correspondant à des moments d'**observation** de ces processus (cf aussi **échelle de mesure**), ou encore un « **temps spécifique** » associé à un phénomène (temps écologique, temps psychologique ou temps « perçu », temps sociologique).

On suppose que T est un (semi-)**groupe** additif doté d'une **relation d'ordre** $\leq$, eg ici T = **N** ou **Z** (**temps discret**). On peut donc définir des valeurs « décalées » tq X_s et X_t , avec $(s, t) \in T^2$ et $s \leq t$, ou tq Y_s et Y_t , avec $(s, t) \in T^2_{\leq}$. On note alors $X_s = L_{t-s} X_t$, où $U_t \mapsto L_d U_t = U_{t-d}$ désigne l'**opérateur retard** de « longueur » d.

(c) il existe deux entiers $p \geq 0$ et $q \geq 0$ ainsi qu'une relation « implicite » ρ entre X et Y de la forme générale (cf aussi **modèle autorégressif de moyenne mobile**) :

(1) $\rho\,(X_t , X_{t-1} ,..., X_{t-p} , Y_t , Y_{t-1} ,..., Y_{t-q}) = 0$ (ou $= U_t$), $\forall\, t \in T$,

dans laquelle ρ peut elle-même (1) être aléatoire (eg dépendre d'un processus $U = (U_t)_{t \in T}$) ou encore (2) dépendre du temps t.

Par suite :

(a) si p = 0 et q = 0, on dit que le modèle représenté sous la forme (1) est un **modèle statique**. Dans ce cas, on est en présence d'une relation dans laquelle les exogènes sont « contemporaines » des endogènes ;

(b) si $p \geq 1$ ou $q \geq 1$, on dit que le modèle représenté sous la forme (1) est un **modèle dynamique**. Dans ce cas, la relation traduit l'effet « décalé » de certaines variables sur d'autres (cf **hystérésis**).

(ii) Le lien ρ peut dépendre du temps de deux façons :

(a) soit de façon « directe » :

(2) $t \mapsto \rho\,(W_t , t)$,

dans laquelle W_t désigne la famille des variables du modèle, avec ou sans décalages ;

(b) soit de façon « indirecte » :

(3) $t \mapsto \rho_t\,(W_t)$,

avec la même interprétation.

Ces deux formes peuvent se ramener l'une à l'autre :

(a) pour le passage (1) $\rightarrow$ (2), on pose : $t \mapsto \rho_t\,(W_t) = \rho\,(W_t , t)$ (seconde application partielle de ρ) ;

(b) pour le passage (2) $\rightarrow$ (1), on pose $t \mapsto \rho\,(W_t , t) = \rho_t\,(W_t)$, puisque ρ dépend de W_t .

(iii) Il existe trois modes d'« **anticipation** » des valeurs successives (« avenir ») d'une grandeur d'intérêt (cf **variable d'intérêt**) :

(a) **projection** ou **extrapolation**. Ce mode, le plus élémentaire, consiste à exprimer une grandeur Z_t indexée par T en fonction de la variable t seule, ie :

(4) $Z_t = \rho(t), \quad \forall t \in T.$

Dans ce cas, t est parfois appelée « **variable fourre-tout** » ou « **variable omnibus** ».

On suppose observée une portion de **trajectoire** de Z, eg $z = (z_s)_{s \in S}$ (avec $S \subset T$), et l'on estime ρ à l'aide d'une **statistique** (de type fonctionnel) $\rho^\#$, par **optimisation** d'une méthode appropriée.

La projection (ou extrapolation), ou encore la « valeur projetée » (ou « valeur extrapolée »), de z à la date $d \in T \setminus S$ n'est alors autre que $z_d^\# = \rho^\#(d)$.

Cette **situation statistique** permet d' « anticiper » l'avenir sans utiliser de modèle proprement dynamique.

Elle est aussi utilisée en matière d'**interpolation** ou encore d'« **inter-projection** » ou « **intra-projection** » (cf eg **coupe instantanée**). Ainsi, on peut souvent baser la **courbe de saturation** d'un phénomène biologique, dont l'équation dans $\mathbf{R}^2$ est de la forme $t \in \mathbf{R} \to S(x) \in \mathbf{R}$, sur une **fonction de répartition** F, où S peut dépendre d'un **paramètre**, eg (α, β, γ) :

(4) $S(x) = \gamma \cdot F((x - \alpha) / \beta), \qquad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}_+^*)^2,$

forme dans laquelle γ désigne le **niveau de saturation**, β un facteur d'échelle et α une valeur de référence. Si $((S_1, x_1), \ldots, (S_N, x_N))$ sont des observations de (S, x) et si S est estimée de façon optimale par $S^\#$, la valeur interpolée et estimée de S en un point x* quelconque n'est alors autre que $S^\#(x^*)$;

(b) **auto-projection** (ou **auto-extrapolation**), ou encore **auto-prévision**. Ce mode consiste à exprimer une grandeur endogène Y_t (indexée par T) en fonction de ses seules valeurs auto-décalées, eg (cf **modèle autorégressif**) :

(5) $Y_t = \rho(Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-q}), \quad \forall t \in T.$

Si l'on observe une portion de **trajectoire** de Y, eg $y = (y_s)_{s \in S}$ (avec $S \subset T$), on peut estimer ρ à l'aide d'une **statistique** $\rho^\#$ par optimisation d'une méthode appropriée.

L'auto-projection (ou auto-extrapolation), ou encore la « valeur auto-projetée » (ou « valeur auto-extrapolée ») de y à une date $d \in T \setminus S$ est alors $y_d^\# = \rho^\#(y_{d-1}^\#, \ldots, y_{d-q}^\#)$, avec la convention $y_{d-k}^\# = y_{d-k}$ si $d - k \in S$. On interprète alors $T \setminus S$ comme l'ensemble des « instants futurs », dont l'« horizon » ou la « longueur » (épaisseur temporelle) sont plus ou moins importants.

Cette situation permet d' « anticiper » l'avenir à l'aide d'un modèle dynamique « autogène » (modèle dynamique le plus simple). Seules les valeurs « passées » d'une même variable Y sont utilisées : le « passé » de Y, ainsi que la forme de la liaison ρ, suffisent pour anticiper son futur ;

(c) **prévision conditionnelle** (ou **prévision mixte**), ou parfois **projection conditionnelle** (ou **projection mixte**), ou encore **extrapolation conditionnelle** (ou **extrapolation mixte**).

Ce mode consiste à exprimer une grandeur endogène Y_t (indexée par T) en fonction de valeurs auto-décalées et de celles, contemporaines ou éventuellement décalées, d'une grandeur exogène X_t (indexée de même) selon la forme (1) initiale.

Si l'on observe une portion de **trajectoire** de Z = (X, Y), eg $z = (z_s)_{s \in S} = (x_s , y_s)_{s \in S}$ (avec $S \subset T$), on peut estimer ρ par une **statistique** $\rho^\#$ à l'aide d'une méthode optimale appropriée.

La **prévision** de y à une date $d \in T \setminus S$, conditionnellement aux valeurs passées de x, se déduit alors de $\rho^\#$ comme solution en y_d de l'équation :

(6) $\rho^\# (x_d^* , x_{d-1}^* ,..., x_{d-p}^* , y_d , y_{d-1}^\# ,..., y_{d-q}^\#) = 0,$

avec, comme précédemment, la convention $y_{d-k}^\# = y_{d-k}$ si $d - k \in S$, et la convention selon laquelle :

(7) $$x_{d-k}^* = \begin{cases} x_{d-k} \text{ si } d - k \in S, \\ \text{valeur donnée a priori, sinon.} \end{cases}$$

Cette situation permet d' « anticiper » l'avenir de Y à l'aide d'un modèle dynamique « complet », au sens de modèle dynamique avec des exogènes et des endogènes. Le passé de Z = (X, Y), mais aussi des **valeurs imposées** à X pour le futur (**hypothèse sur le futur des exogènes**), ainsi que l'estimation de ρ, permettent alors de déduire un futur conditionnel possible de Y (variable d'intérêt).

(iv) Les notions précédentes s'étendent, avec un formalisme adapté, à des processus Z se déroulant, ou observés, en **temps continu** (eg $T \subset \mathbf{R}$).

Ainsi, lorsque, dans (1), ρ possède une forme additive tq :

(1)' $\Sigma_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \Sigma_{j=1}^q b_j Y_{t-j} = 0$ (ou $= U_t$), $\forall t \in T$,

la version continue de (1)' peut s'écrire sous forme « intégrale » :

(1)" $\int a_\tau X_{t-\tau} d\lambda_1 (\tau) + \int b_\tau Y_{t-\tau} d\lambda_1 (\tau) = 0$ (ou $= U_t$), $\forall t \in \mathbf{R}$, où λ_1 désigne la **mesure de LEBESGUE** définie sur $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ et où les intégrales sont définies sur des **parties** appropriées de T.

(v) Pour tenir compte d'instants d'observation différents des instants intrinsèquement phénoménaux, on peut aussi concevoir des **processus en temps quelconque** : T est alors doté d'une **tribu** $\mathscr{B}_{\mathrm{T}}$ sur laquelle est définie une mesure positive ν.