MODÈLE EXPONENTIEL (C7, G2)
(09 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **modèle exponentiel** est un modèle statistique paramétrique dont la **famille des lois** est exponentielle (cf **famille exponentielle**). De nombreuses **structures statistiques** usuelles sont de ce type.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un **modèle statistique** de base tq :

(a) la famille $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille de lois dominée** par une **mesure positive** σ-finie μ (cf **mesure σ-finie**) ;

(b) Θ est un **ouvert** convexe de $\mathbf{R}^Q$ (cf **partie convexe**) ;

(c) il existe une **application mesurable** (ou **va**) $t : \Omega \mapsto \mathbf{R}^Q$ tq la fonction $\varphi : \Theta \mapsto \mathbf{R}$ définie par :

(1) $$e^{\varphi(\theta)} = \int e^{<\theta, t(\omega)>} d\mu(\omega) = \int e^{<\theta, t>} d\mu$$

soit finie sur Θ, avec $< \theta, t(\omega) > = \Sigma_{q=1}^Q \theta_q \, t_q(\omega)$ (**produit scalaire** euclidien dans $\mathbf{R}^Q$).

On dit que le modèle précédent est un **modèle exponentiel (de base)** ssi :

(2) $$(dP_\theta / d\mu)(\omega) = \exp\{< \theta, t(\omega) > - \varphi(\theta)\}, \qquad \forall \theta \in \Theta,$$

ie ssi ses **dérivées de NIKODYM-RADON** (qui définissent sa **densité** ou sa **fonction de vraisemblance**) sont exponentielles.

On définit aussi un **modèle exponentiel** sous la forme voisine :

(3) $$(dP_\theta / d\mu)(\omega) = c(\theta) \,.\, h(\omega) \,.\, \exp\{\Sigma_{q=1}^Q g_q(\theta) \, t_q(\omega)\},$$

dans laquelle les fonctions $h : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ et $g_q : \Theta \mapsto \mathbf{R}$ ($\forall q \in N_Q{}^*$) sont $\mathcal{T}$-mesurables (Θ peut, ici, être un ensemble quelconque), la fonction $c : \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$ jouant un rôle de **normalisation**.

(ii) On montre notamment que :

(a) un modèle exponentiel est un **modèle régulier** ;

(b) sous la forme (2), la va t est un **estimateur sans biais** du **gradient** de φ, ie :

(4) $$E_\theta \, t = \text{Grad} \, \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

(iii) La notion se définit de même pour un modèle image. Soit $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire**, μ^ξ la **mesure image** de μ par ξ (définie sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^K)$), $(\mathbf{R}^K, \mathcal{B}(\mathbf{R}^K), P_\theta{}^\xi)_{\theta \in \Theta}$ le **modèle image** du précédent par θ, et $t : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}^Q$ une application mesurable définissant une **statistique** $T = t(\xi)$.

On dit que ce modèle est un **modèle exponentiel image** ssi :

(5) $\quad (dP_\theta{}^\xi / d\mu^\xi)(x) = \exp\{< \theta , t(x) > - \psi(\theta)\}, \qquad \forall (x, \theta) \in \mathbf{R}^K \times \Theta,$

où $\psi : \Theta \mapsto \mathbf{R}$ est une fonction finie sur Θ et tq :

(6) $\quad \psi(\theta) = \mathrm{Log}\{\int e^{< \theta, t(x) >} d\mu^\xi(x)\}, \qquad \forall \theta \in \Theta.$

La forme (3) devient ici :

(7) $\quad (dP_\theta{}^\xi / d\mu^\xi)(x) = c(\theta) . h(x) . \exp\{\Sigma_{q=1}{}^Q g_q(\theta) t_q(x)\}.$

La notion s'applique ainsi à un **modèle d'échantillonnage**.

(iv) En pratique, on peut :

(a) changer de **mesure** μ (resp μ^ξ) selon la relation $\mu_\# = h . \mu$ (resp $\mu_\#{}^\xi = h . \mu^\xi$), ce qui simplifie le formalisme :

(8) $\quad dP_\theta / d\mu_\#(\omega) = c(\theta) . e^{< g(\theta) , t(\omega) >}, \qquad \forall (\omega, \theta) \in \Omega \times \Theta,$

ou (resp) :

(9) $\quad dP_\theta{}^\xi / d\mu_\#{}^\xi(x) = c(\theta) e^{< g(\theta) , t(x) >}, \qquad \forall (x, \theta) \in \mathbf{R}^K \times \Theta ;$

(b) changer de **paramètre** en posant eg :

$\tau_q = g_q(\theta), \quad \forall q \in N_Q{}^*,$

(10) et

$\tau = (\tau_1 ,..., \tau_Q)'.$

Par suite, on obtient les formes :

(11) $\quad (dP_\theta / d\mu_\#)(\omega) = \gamma(\tau) . e^{< \tau , t(\omega) >}, \qquad \forall (\omega, t) \in \Omega \times \mathbf{R}^Q,$

et :

(12) $\quad (dP_\theta{}^\xi / d\mu_\#{}^\xi)(x) = \gamma(\tau) . e^{< \tau , t(x) >}, \qquad \forall (x, \tau) \in \mathbf{R}^K \times \mathbf{R}^Q.$

(v) Sous des conditions générales, un modèle exponentiel admet :

(a) une famille de probabilités totale $(P_\tau{}^T)_{\tau \in g(\Theta)}$ si T est une **statistique totale** (cf **totalité**) ;

(b) la statistique t elle-même comme **statistique exhaustive** du paramètre τ.