

MODÈLE INVARIANT (C2, G2)

(10 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle image** paramétré par Θ et $\mathcal{G}$ un **groupe de transformations** mesurables $g : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$.

On dit que ce modèle est un **modèle invariant** pour le groupe $\mathcal{G}$ ssi la **famille** des **lois** $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ est, à la fois, une **famille de lois identifiable** et une famille invariante par les transformations g .

Cette **propriété d'invariance** s'exprime dans la définition suivante :

$$(1) \quad \forall g \in \mathcal{G}, \forall \theta \in \Theta, \exists \theta^* \in \Theta, \text{ unique, tq } P_{\theta^*}^{g(X)} = P_\theta^X.$$

(ii) L'application $\bar{g} : \Theta \mapsto \Theta$ définie par la relation :

$$(2) \quad \bar{g}(\theta) = \theta^*$$

est appelée **transformation induite** par g sur Θ .

L'ensemble de ces transformations $\bar{g}$ est un **groupe**, noté $\bar{\mathcal{G}}$, appelé **groupe induit** par $\mathcal{G}$ sur Θ .

On peut alors écrire (1) sous la forme :

$$(3) \quad \forall (g, \theta) \in \mathcal{G} \times \Theta, \quad P_\theta^X([g(X) \in B]) = P_{g(\bar{\theta})}^X([X \in B]), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

(iii) La définition s'étend au cas d'un **modèle sans paramétrage explicite**.

On dit qu'un modèle $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$ est un **modèle invariant** (par un groupe $\mathcal{G}$ défini comme précédemment) ssi, $\forall g \in \mathcal{G}, \forall P^X \in \mathcal{P}^X$, il existe une loi $Q^X \in \mathcal{P}^X$, unique, tq :

$$(4) \quad P^X([g(X) \in B]) = Q^X([X \in B]), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

L'application $\bar{g} : P^X \mapsto Q^X = \bar{g}(P^X)$, ainsi définie sur $\mathcal{P}^X$, est alors appelée **transformation induite** par $g \in \mathcal{G}$ sur $\mathcal{P}^X$.