

MODÈLE RÉGULIER (G2)

(06 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Un **modèle image** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$ est appelé **modèle régulier** ssi il existe une **mesure positive** μ , définie sur $\mathcal{B}$, tq :

(a) la **famille** $\mathcal{P}^X$ est absolument continue pr à (ie uniformément dominée par) μ , ie (cf **famille de lois dominée**) :

$$(1) \quad P^X \ll \mu, \quad \forall P^X \in \mathcal{P}^X;$$

(b) la famille des **densités de probabilité** associée à $\mathcal{P}^X$ comporte des densités strictement positives, ie :

$$(2) \quad f_P = dP^X / d\mu > 0, \quad \forall P^X \in \mathcal{P}^X.$$

(ii) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ un **modèle paramétrique** (avec $\Theta \subset \mathbf{R}^Q$).

On dit qu'il s'agit d'un **modèle régulier** ssi il vérifie les cinq conditions suivantes :

(a) $\Theta \neq \emptyset$ et $\Theta \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^Q)$ (**ouvert** de $\mathbf{R}^Q$) ;

(b) le modèle est à la fois un **modèle dominé** et un **modèle homogène**, ie il existe sur $\mathcal{B}$ une mesure positive σ -finie μ tq (cf **mesure σ -finie**) :

$$(3) \quad P_\theta^X \ll \mu, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (\text{domination par } \mu),$$

et que :

$$(4) \quad f(\cdot, \theta) = dP_\theta^X / d\mu > 0, \quad \mu\text{-p.p.}, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

(**vraisemblance** à **support** $\text{Supp } f(\cdot, \theta)$ indépendant de θ) ;

(c) l'application (**fonction de vraisemblance**) $\theta \mapsto f(\cdot, \theta)$ est μ -p.p. différentiable pr à θ , ie (cf **différentiabilité, gradient**) :

$$(5) \quad D_2 f(x, \theta) = \text{Grad}_\theta f(x, \theta) \text{ existe } \mu\text{-p.p.}, \quad \forall \theta \in \Theta;$$

(d) on peut permuter **dérivation** pr au second argument et **intégration** pr au premier argument (cf **dérivation sous le signe d'intégration**), ie :

$$(6) \quad D_2 \int f(\cdot, \theta) d\mu = \int D_2 f(\cdot, \theta) d\mu$$

est une opération licite ;

(e) la **matrice d'information** de FISHER $I(\theta)$ existe et est une **matrice définie positive** (régulière) (cf **information de FISHER**), ie $0 \leq V_\theta \{ \text{Grad}_\theta \text{Log} (f(X, \theta)) \} < +\infty$.

Ces hypothèses permettent de démontrer divers résultats classiques en **théorie de la décision** : eg l'**inégalité de CRAMER-DARMOIS-FRÉCHET-RAO**.