

MOMENT ABSOLU (C5, F3)

(31 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **moment absolu** est une **caractéristique légale** qui concerne, en général, une **variable numérique**, mais qui peut aussi être défini pour une **variable qualitative** valuée.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^ξ .

On appelle **moment absolu (théorique)** d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$ et **centré en** $\alpha \in \mathbf{R}$ de ξ (ou de P^ξ) le nombre réel positif (qui existe si $\xi \in L^j(\Omega, \mathcal{F}, P)$) :

$$(1) \quad \mu_{j,\alpha}' = E |\xi - \alpha|^j = \int |x - \alpha|^j dP^\xi(x) = \int |\xi(\omega) - \alpha|^j dP(\omega).$$

Le plus souvent, on choisit un **moment absolu centré** pr :

(a) au moment simple (**espérance mathématique**) $\alpha = \mu_1 = E \xi$, auquel cas on les note simplement μ_j' ;

(b) ou parfois pr à la médiane ($\alpha = Q_{1/2} \xi$), ou encore pr au mode ($\alpha = S \xi$).

Lorsque $\alpha = 0$, on définit le **moment absolu simple (théorique)**, ou **moment « non centré »**, que l'on note μ_j' .

En particulier, si ξ est à valeurs non négatives (ie si $\text{Supp } P^\xi \subset \mathbf{R}_+$), ou si $j \in 2 \mathbf{N}^*$, le moment absolu d'ordre j se confond avec le **moment algébrique** de même ordre, ie $\mu_{j,\alpha}' = \mu_{j,\alpha}$, $\forall j \in 2 \mathbf{N}^*$.

(ii) On montre que (cf aussi **valeur typique de FRÉCHET**) :

(a) c'est pr à la **médiane** (supposée unique) $\alpha = Q_{1/2} \xi$ que le moment absolu d'ordre 1, appelé **moment absolu moyen**, $\mu_{1,\alpha}'$ est minimum ;

(b) c'est pr à la **moyenne** (supposée exister) $E \xi = \mu_1$ que le moment absolu d'ordre 2, appelé **écart quadratique moyen**, $\mu_{2,\alpha}' = \mu_{2,\alpha}$ est minimum. Ce minimum au point $E \xi$ n'est autre que la **variance** $V \xi$.

(iii) On définit la notion de **moment absolu (empirique) centré** en $a \in \mathbf{R}$ de façon analogue, en remplaçant dans (1) P^ξ par la **loi empirique** P_N associée à un **échantillon** $X = (X_1, \dots, X_N)$ iid selon P^ξ (cf **statistique naturelle**). On obtient ainsi :

$$(2) \quad m_{j,a}'(N) = E_N |\xi - a|^j = \int |x - a|^j dP_N(x) = N^{-1} \sum_{n=1}^N |X_n - a|^j, \quad \forall j \in \mathbf{N}^*.$$

Ce moment est aussi simplement noté $m_{j,a}'$.

Dans (2), a désigne en général un nombre certain. Parfois, il peut s'agir d'une **va** ou d'une **statistique** donnée (eg la **moyenne empirique** ou la **médiane empirique**).

Si $a = 0$, on note simplement m_i' le **moment absolu simple**, ou **moment « non centré »**, (empirique) ainsi défini.

(iv) La notion de moment absolu peut, en théorie, se généraliser à une **variable multidimensionnelle** (**vecteur aléatoire**) ou à une **loi multidimensionnelle** : le calcul s'effectue à partir d'une norme $\|\cdot\|$ de ξ : $\mu_{i,\alpha}' = E \|\xi - \alpha\|^j$.