MOMENT ALGÉBRIQUE (C5, F3)
(31 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **moment algébrique** est une **caractéristique légale** qui sert à décrire une **lp** de divers points de vue : **centralité**, **dispersion**, **forme**, etc. Il concerne en général une **variable numérique**, mais une **variable qualitative** peut aussi posséder un moment si elle est valuée.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^{ξ}.

On appelle **moment algébrique simple**, ou **moment algébrique non centré**, (**théorique**) d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$ de ξ (ou de P^{ξ}) le nombre réel (s'il existe) :

(1) $\mu_j = E\, \xi^j = \int x^j\, dP^{\xi}(x) = \int (\xi(\omega))^j\, dP(\omega), \quad \forall\, j \in \mathbf{N}^*.$

Le nombre μ_j est aussi appelé **moment (d'inertie)**, ou **centre de gravité**, ou encore **barycentre**, d'ordre j de ξ centré pr à l'origine $0 \in \mathbf{R}$.

Si $\xi \in L_{\mathbf{R}}^p(\Omega, \mathcal{T}, P)$, les moments μ_j existent, $\forall\, j \in N_p^*$.

(ii) A titre d'exemple, si p = 1, on définit l'**espérance mathématique** de ξ. Si p = 2, $\mu_2 = E\, \xi^2$ est parfois appelé **moment d'inertie** (pr à l'origine 0) de la loi P^{ξ} sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$.

(iv) On appelle **moment algébrique** (**théorique**) **centré** en $\alpha \in \mathbf{R}$ d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$ de ξ (ou de P^{ξ}) le nombre réel (s'il existe) :

(2) $\mu_{j,\alpha} = E\, (\xi - \alpha)^j = \int (x - \alpha)^j\, dP^{\xi}(x) = \int (\xi(\omega) - \alpha)^j\, dP(\omega).$

Les remarques précédentes, faites pour les moments non centrés, valent encore pour les moments centrés.

Sans autre précision, le terme de « moment » désigne en général un moment algébrique.

A titre d'exemples :

(a) si p = 1, on a $\mu_{1,\alpha} = E\, \xi - \alpha$ (**écart algébrique** ou **déviation algébrique**) ;

(b) si p = 2, on définit la « **variance autour de** α » de ξ (cf **écart quadratique moyen**).

Souvent, en pratique, on pose $\alpha = E\, \xi = \mu_1$. Alors $\mu_{1,E\xi} = 0$ et $\mu_{2,E\xi} = V\, \xi$ (**variance** de ξ).

(iii) La définition des moments peut s'étendre, dans certains cas, aux **exposants négatifs** $j \leq 0$, ou aux exposants réels $j \in \mathbf{R}_+$ (**moments étendus**). Ainsi :

(a) la moyenne théorique d'ordre j = 0 s'identifie à la **moyenne géométrique théorique** G ξ, définie (si elle existe) par :

(3) $\mathrm{Log}\,(G\,\xi) = \int \mathrm{Log}\,|x|\, dP^{\xi}(x)$;

(b) de même, la moyenne théorique d'ordre j = -1 est identifiée à la **moyenne harmonique théorique** H ξ, définie (si elle existe) par :

(4) $(H\,\xi)^{-1} = \int |x|^{-1}\, dP^{\xi}(x)$.

On parle alors de **moyenne d'ordre j**, avec $j \in \mathbf{N}^*$, ou $j \in \mathbf{Z}$, voire $j \in \mathbf{R}_+$ ou $j \in \mathbf{R}$.

(iv) Les moments algébriques sont symbolisés de façon diverse.

Pour les moments théoriques, on rencontre les notations suivantes.

Moment algébrique	A.F.Nor.	H. CRAMER	M.G. KENDALL
centré pr à E ξ	μ_j	μ_j	μ_j
non centré	m_j'	α_j	μ_j'

(v) Si $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ est un **vecteur aléatoire** réel de loi P^{ξ}, on appelle **moment simple** (**théorique**) d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$ la **suite** (finie) $\mu = (\mu_J)$ associée à la **forme multilinéaire** (ici K-linéaire) $\mu_j : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}$ définie selon :

(5) $u \mapsto \mu_j(u) = \Sigma_J\, \mu_J \,.\, u_{j(1)} \ldots u_{j(K)}$,

dans laquelle :

(6) $\mu_J = E\, \xi_1^{j(1)} \ldots \xi_K^{j(K)}$,

pour toute suite d'entiers $J = (j_1, \ldots, j_K)$ tq $\Sigma_{k=1}^{K} j_k = j$, avec $j_k \geq 0$, $\forall\, k \in N_K^*$, où l'on désigne aussi par j(k) les indices ou exposants j_k (k = 1 ,..., K).

On définit de même les notions de **moment centré** ou de **moment absolu** (théoriques).

(vi) On définit, de façon analogue à ce qui précède, la notion de **moment empirique** (cf **statistique naturelle**) à l'aide de la **loi empirique** P_N associée à un N-**échantillon** $X = (X_1, \ldots, X_N)$.

Ainsi, dans le cas « scalaire », où les X_n sont à valeurs dans **R** :

(a) on appelle ainsi **moment algébrique simple**, ou **moment algébrique non centré**, (**empirique**) d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$ de X (ou de P_N) le nombre réel :

(1)' $m_j = E_N\, \xi^j = \int x^j\, dP_N(x) = \Sigma_{n=1}^{N} X_n^j$, $\forall\, j \in \mathbf{N}^*$;

(b) on appelle **moment algébrique** (**empirique**) **centré** en a $\in$ **R** d'ordre j $\in$ **N*** de X (ou de P_N) le nombre réel :

(2)' $$m_{j,a} = E_N (\xi - a)^j = \int (x - a)^j \, dP_N (x) = \Sigma_{n=1}^{N} (X_n - a)^j.$$

La grandeur a peut être soit un scalaire réel, soit une **statistique**. Dans les questions asymptotiques, on met en valeur la taille d'échantillon en notant m_j (N) au lieu de m_j et $m_{j,a}$ (N) au lieu de $m_{j,a}$.

En pratique, les moments algébriques sont souvent centrés par rapport à la **moyenne arithmétique** $\bar{X}_N = N^{-1} \Sigma_{n=1}^{N} X_n$, qui remplace la valeur a précédente.

(vii) Etant une statistique naturelle, un **moment empirique** est souvent l'**estimateur** du moment théorique correspondant. Il est parfois nécessaire d'effectuer d'éventuelles corrections ou modifications préalables (cf **moment corrigé**, **correction**, **modification**).