MOMENT FACTORIEL (C5, F3)
(09 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **moment factoriel** est un **moment** particulier, utilisé notamment dans l'étude d'une **loi discrète**.

(i) Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $j \in N_p^* = \{1 ,..., p\}$ deux entiers, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi \in L_{\mathbf{R}}^p (\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On appelle **moment factoriel d'ordre j** de ξ, ou de sa **loi** P^ξ, le nombre réel :

(1) $\mu_{(j)} = E \{\xi . (\xi - 1) ... (\xi - j + 1)\}$,

aussi noté $[\xi]_j$, ou $(\xi)_j$, ou $\xi_{[j]}$ ou encore $\xi_{(j)}$.

Le moment factoriel d'ordre j de ξ n'est autre que l'**espérance** du **polynôme factoriel** d'ordre j, défini par :

(2) $P_j (\xi) = \xi . (\xi - 1) ... (\xi - j + 1)$.

(ii) En pratique, la notion n'est utilisée que pour une **variable discrète** ξ, à valeurs dans **N** ou dans **Z**, ou pour une **loi discrète** P^ξ dont le **support** est **N** ou **Z**.

Elle peut s'étendre au cas où $p \in \mathbf{R}^*_+$.

(iii) On montre que :

(a) $\mu_{(1)} = E\ \xi = \mu_1$ (**espérance mathématique**) ;

(b) $\mu_{(2)} = E\ \xi^2 - E\ \xi = \mu_2 - \mu_1$ (deux premiers **moments algébriques** non centrés).

(iv) De la même façon, si l'on définit un **polynôme pseudo-factoriel d'ordre j** selon :

(3) $Q^j (\xi) = \xi . (\xi + 1) ... (\xi + j - 1)$,

on appelle alors **moment pseudo-factoriel** d'ordre $j \in N_p^*$ de ξ (ou de P^ξ) l'espérance de $Q_j (\xi)$, ie :

(4) $\mu^{(j)} = E \{\xi . (\xi + 1) ... (\xi + j - 1)\}$, $\forall\ j \in N_p^*$,

aussi notée $[\xi]^j$, ou $(\xi)^j$, ou $\xi^{[j]}$ ou encore $\xi^{(j)}$.

(v) On montre que :

$$(5) \quad \begin{aligned} \mu^{(1)} &= E\,\xi = \mu_1 , \\ \mu^{(2)} &= E\,\xi^2 + E\,\xi = \mu_2 + \mu_1 . \end{aligned}$$

(vi) On peut définir, de façon parallèle, la notion de **moment factoriel empirique** à partir d'un **échantillon** $X = (X_1 ,..., X_N)$ engendré par P^{ξ} et de la **loi empirique** P_N associée à X (cf **statistique naturelle**).