MOMENT MARGINAL (C5, F3)
(31 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Comme toute **caractéristique marginale**, un **moment marginal** est un **moment** calculé à l'aide d'une **loi marginale**. Ceci suppose la donnée d'une **loi multidimensionnelle**.

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi \in L_{R^K}{}^p (\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **vecteur aléatoire** à valeurs dans $\mathbf{R}^K$ et dont la **loi** est notée P^ξ. Soit $(k_1, ..., k_L)$ une **suite** d'**indices** tq $k_l \in N_K{}^*$ et $k_m \neq k_l$ si $m \neq l$, avec $1 \leq L \leq K$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $J = (j_1, ..., j_L)$ une suite d'exposants tq $j_l \geq 0$, $\forall\ l \in N_L{}^*$ et $\Sigma_{l=1}{}^L j_l = j$, avec $j \in N_p{}^*$.

On appelle alors :

(a) **moment algébrique marginal d'ordre j théorique et non centré** de type $(k_1, ..., k_L)$ la famille des moments d'ordre j de la **loi marginale** $\mathscr{L}(\xi_{k(1)}, ..., \xi_{k(L)}) = pr_{k(1)... k(L)} P^\xi$, ie la **famille** de nombres (scalaires) :

(1) $\mu_j (k_1, ..., k_L) = E\ \xi_{k(1)}{}^{j(1)} ... \xi_{k(L)}{}^{j(L)}$.

où les j(l) et les k(l) désignent resp, par commodité, les j_l et les k_l .

De façon explicite :

(2) $\mu_j (k_1, ..., k_L) = \int x_{k(1)}{}^{j(1)} ... x_{k(L)}{}^{j(L)}\ d\mathscr{L}(\xi_{k(1)}, ..., \xi_{k(L)})(x_{k(1)}, ..., x_{k(L)})$;

(b) **moment algébrique marginal d'ordre j théorique et centré** pr à $\alpha_{k(1) ... k(L)} = (\alpha_{k(1)}, ..., \alpha_{k(L)}) \in \mathbf{R}^L$ de type $(k_1, ..., k_L)$ la famille des moments d'ordre j centrés en $\alpha_{k(1)... k(L)}$ de la loi marginale précédente, ie l'ensemble des nombres :

(3) $\mu_{j,\alpha} (k_1, ..., k_L) = E\ (\xi_{k(1)} - \alpha_{k1})^{j(1)} ... (\xi_{k(L)} - \alpha_{k(L)})^{j(L)}$,

où $\alpha_{k(1)... k(L)} = pr_{k(1)... k(L)}\ \alpha$, $\forall\ \alpha \in \mathbf{R}^K$.

Lorsque $\alpha = E\ \xi$, les moments centrés sont simplement notés $\mu_j' (k_1, ..., k_L)$.

(ii) Ainsi :

(a) lorsque L = 1, on définit K moments marginaux élémentaires, qui correspondent aux K lois marginales élémentaires, dites unidimensionnelles. Chaque moment marginal élémentaire est calculé avec la loi d'une variable marginale élémentaire (variable simple, ou individuelle) : cette **loi marginale** est la **loi propre** de la variable considérée ;

(b) lorsque L = 2, les moments marginaux centrés pr à $\alpha_l = E\ \xi_l$ (l = 1, 2) sont souvent notés :

$\mu_{20}(\xi_1, \xi_1) = E(\xi_1 - E\,\xi_1)^2 = V\,\xi_1$ (**variance** propre de ξ_1),

(4) $\mu_{02}(\xi_2, \xi_2) = E(\xi_2 - E\,\xi_2)^2 = V\,\xi_2$ (variance propre de ξ_2),

$\mu_{11}(\xi_1, \xi_2) = C(\xi_1, \xi_2)$ (**covariance** de ξ_1 et ξ_2).

Leur ensemble définit ainsi la (2,2)-**matrice de covariance** $V\,\xi$ de ξ.

(iii) On montre que :

(a) un **changement de variable aléatoire** affine (cf **application affine**) :

(5) $\xi = \gamma + D\,\eta$,

dans lequel $\gamma \in \mathbf{R}^K$ et $D \in D_L(\mathbf{R}) \cap R_L(\mathbf{R})$ (**matrice diagonale** régulière), conduit à une relation entre moments marginaux de type $(k_1, ..., k_L)$:

(6) $\mu_{j,x}'(k_1, ..., k_L) = (d_{k(1)}{}^{j(1)} \ldots d_{k(L)}{}^{j(L)})\,.\,\mu_{j,y}'(k_1, ..., k_L)$,

où $\mu_{j,x}'$ est le moment marginal de ξ (centré en $\alpha = E\,\xi$) et $\mu_{j,y}'$ celui de η (centré en $\beta = E\,\eta$) ;

(b) si les coordonnées ξ_k de ξ sont indépendantes, alors :

(7) $\mu_j'(k_1, ..., k_L) = \mu_{j(1),0\ldots 0}'(k_1, ..., k_L) \ldots \mu_{0\ldots 0,j(L)}'(k_1, ..., k_L)$.

Autrement dit, le moment marginal de type $(k_1, ..., k_L)$ est le produit des moments marginaux précédents. Il en est de même pour les moments centrés.

(iv) En considérant la **loi empirique** P_N associée à un N-**échantillon** engendré par la **variable parente** ξ, on définit des **moments marginaux algébriques d'ordre j empiriques** (calcul d'espérances pr à P_N). Ces moments sont des **statistiques naturelles** qui peuvent être utilisées comme estimateurs des moments théoriques analogues.

(v) Les définitions (théoriques et empiriques) précédentes peuvent se transposer à d'autres types de **moments**, eg :

(a) **moment absolu**, **moment exponentiel**, etc ;

(b) moment brut ou **moment corrigé**, moments censurés ou non (cf **censure**, **moyenne censurée**), **moment équilibré** ou non, etc.

Mais ces dernières notions sont d'utilisation plus restreinte.

(vi) Lorsque K = 2, on utilise souvent les notations suivantes :

(a) si les lois considérées sont des **lois absolument continues** pr à la **mesure de LEBESGUE** $\lambda_2 = dx\,dy$ définie sur la **tribu borélienne** $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$, on considère un **couple aléatoire** (ξ, η) à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, dont la loi possède une

densité $h : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}_+$. Sous des hypothèses standards, les lois marginales de ξ et η, souvent appelées **« lois propres »** à ξ et à η, admettent resp pour densités :

$$
(8) \quad \begin{aligned} f(x) &= \int h(x, y)\, dy, \\ g(y) &= \int h(x, y)\, dx. \end{aligned}
$$

Par suite, dans le cas de moment algébriques centrés resp pr à $\alpha \in \mathbf{R}$ (resp pr à $\beta \in \mathbf{R}$), les moments d'ordre $j \in N_p^*$ de ξ (resp de η) sont simplement calculés selon :

$$
(9) \quad \begin{aligned} \mu_{j,x} &= E(\xi - \alpha)^j = \int (x - \alpha)^j f(x)\, dx, \\ \mu_{j,y} &= E(\eta - \beta)^j = \int (y - \beta)^j g(y)\, dy. \end{aligned}
$$

On peut aussi définir des **« moments croisés »** de la forme :

$$
(10) \quad \mu_{jk,xy} = E(\xi - \alpha)^j (\eta - \beta)^k = \iint (x - \alpha)^j (y - \beta)^k f(x)\, g(y)\, dx\, dy,
$$

etc.

(b) si les lois considérées sont des **lois discrètes** pr à la **mesure de comptage** $\nu = d\nu_1\, d\nu_2$ définie sur la **tribu discrète** $\mathcal{D}(\mathbf{N}^2)$ de $\mathbf{N}^2$ (ou $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^2)$ de $\mathbf{Z}^2$), on considère un **couple aléatoire** (ξ, η) à valeurs dans $\mathbf{N}^2$, qui suit une loi dont la « densité » est $h : \mathbf{N}^2 \mapsto \mathbf{R}_+$. Sous des hypothèses standards, les lois marginales de ξ et η, encore appelées **lois propres** de ξ et à η, admettent resp pour densités pr à ν_1 (resp pr à ν_2) :

$$
(8) \quad \begin{aligned} f(x) &= \Sigma_{y \in \mathbf{N}}\, h(x, y), \\ g(y) &= \Sigma_{x \in \mathbf{N}}\, h(x, y). \end{aligned}
$$

Dans le cas de moment algébriques centrés pr à $\alpha \in \mathbf{N}$ (resp pr à $\beta \in \mathbf{N}$), les moments d'ordre $j \in N_p^*$ de ξ (resp de η) sont calculés selon :

$$
(9) \quad \begin{aligned} \mu_{j,x} &= E(\xi - \alpha)^j = \Sigma_{x \in \mathbf{N}}\, (x - \alpha)^j . f(x), \\ \mu_{j,y} &= E(\eta - \beta)^j = \Sigma_{y \in \mathbf{N}}\, (y - \beta)^j . g(y). \end{aligned}
$$

On peut encore définir des **« moments croisés »** de la forme :

$$
(10) \quad \mu_{jk,xy} = E(\xi - \alpha)^j (\eta - \beta)^k = \Sigma_{x \in \mathbf{N}}\, \Sigma_{y \in \mathbf{N}}\, (x - \alpha)^j (y - \beta)^k f(x)\, g(y)\, dx\, dy,
$$

etc.

Les mêmes définitions valent pour des lois discrètes pr à la mesure de comptage $\nu = d\nu_1\, d\nu_2$ définie sur la tribu discrète $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^2)$ de $\mathbf{Z}^2$.

(vii) Comme pour un moment ordinaire (ou **moment conjoint**), un moment marginal peut, dans certains cas, être défini pour une **variable qualitative** (valuée).