MOYENNE ARITHMÉTIQUE (C5, F3)
(29 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **moyenne arithmétique** est une **caractéristique légale** très utilisée dans toutes les parties de la **Statistique**. Caractéristique de **centralité** très simple, elle correspond, selon le cas :

(a) en **calcul des probabilités**, à la notion d'**espérance mathématique** ;

(b) en **Statistique**, à la notion « courante » de **moyenne empirique** (cf **statistique naturelle**).

La variable considérée est une **variable numérique**, soit scalaire, soit vectorielle.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^{ξ}.

On appelle **moyenne arithmétique (théorique)** de ξ (ou de P^{ξ}) le nombre réel (s'il existe) $M\,\xi$ tq :

(1) $\quad M\,\xi = E\,\xi = \int x \, dP^{\xi}(x).$

$M\,\xi$ existe dès que $\xi \in L_{\mathbf{R}}^{1}(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Elle est souvent notée μ.

Etant donné une **fonction numérique** g tq $\int g(x)\, d\lambda(x) = 1$ (**fonction de poids**), on appelle **moyenne arithmétique pondérée** (selon g) (**théorique**) de ξ la valeur scalaire M_g définie par :

(3) $\quad M_g\,\xi = \int g(x)\, dP^{\xi}(x).$

La moyenne définie en (1) est aussi appelée **moyenne (arithmétique) simple théorique**, car c'est une moyenne pondérée par la fonction simple g = **1** (fonction **constante** partout égale à 1).

(ii) Soit $X = (X_1, \ldots, X_N)$ un **échantillon aléatoire**. On suppose que X est un **échantillon équidistribué** selon P^{ξ} (ie $X_n \sim P^{\xi}$, $\forall\, n = 1, \ldots, N$), où ξ est la **variable parente**.

On appelle **moyenne arithmétique (empirique)** de ξ (ou de X) la va (ou **statistique**) M_N tq :

(2) $\quad M_N = \int x \, dP_N(x) = N^{-1} . \Sigma_{n=1}^{N} X_n ,$

où P_N est la **loi empirique** associée à X (cf aussi **moyenne empirique**).

Si $e_N = (1 ,..., 1)' \in \mathbf{R}^N$ désigne le premier vecteur bissecteur de $\mathbf{R}^N$, on peut aussi écrire, sous forme vectorielle :

(2)' $M_N = e_N' X / e_N' e_N$.

Etant donné $\lambda \in S_N$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^N$), on appelle **moyenne arithmétique** (**empirique**) **pondérée** (selon λ) de ξ (ou de X) la **va** $M_N(\lambda)$ tq :

(3) $M_N(\lambda) = \int x \, dL_N(x) = \Sigma_{n=1}^N \lambda_n X_n$,

où $L_N = \Sigma_{n=1}^N \lambda_n . \delta(X_n)$ est la **mesure discrète** associée à λ et $\delta(x)$ la **mesure de DIRAC** placée au point x.

La moyenne définie en (2) est encore appelée **moyenne (arithmétique) simple empirique**, car c'est une moyenne pondérée par une **suite** $\lambda = (\lambda_1 ,..., \lambda_N)$ tq $\lambda_n = (e' e)^{-1} = N^{-1}$, $\forall n \in N_N^*$ (poids égaux entre eux) (ie $n \mapsto \lambda_n$ est une fonction constante discrète).

(iii) La moyenne arithmétique empirique est généralement notée $\overline{X}_N$ ou simplement $\overline{X}$. Elle constitue un **estimateur** naturel de l'espérance mathématique (cf **statistique naturelle**). On montre que :

(a) M_N est un **estimateur sans biais** de l'espérance, ie : $E\, M_N = E\, \xi = \mu$;

(b) si, de plus, $\xi \in L_{\mathbf{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et si $V \xi = E(\xi - E\,\xi)^2$ désigne la **variance** théorique de ξ et X un **échantillon iid** selon P^ξ, alors $V\, \overline{X}_N = N^{-1} V \xi = \sigma^2 / N$ (où σ dénote l'**écart-type** de ξ).

(v) On peut dériver de nombreux concepts à partir des définitions précédentes : autres types de **moyennes** (**moyennes potentielles**, etc), moyennes « altérées » (**moyenne censurée**, **moyenne équilibrée**, **moyenne potentielle**), **moments** ou **statistiques** diverses.

Ainsi :

(a) si $\eta = \text{Log}\, \xi$, on définit la **moyenne géométrique** (théorique) ;

(b) si $Y_n = \text{Log}\, X_n$ ($\forall n = \{1 ,..., N\}$), on définit la moyenne géométrique empirique.

(vi) La plupart des définitions et propriétés précédentes s'étendent à plusieurs dimensions. On définit ainsi la « moyenne » (théorique ou empirique) d'un **vecteur aléatoire** réel $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$, de **loi** P^ξ, ou d'un échantillon X généré par ξ, ie d'une matrice aléatoire X à valeurs dans $M_{NK}(\mathbf{R})$. Les définitions et propriétés s'appliquent à chaque coordonnée ξ_k de ξ ou à chaque colonne X^k de X (pour tout k = 1 ,..., K).

(vii) Les propriétés de la moyenne arithmétique sont importantes : **paramètre de position**, **additivité**, **théorème de la limite centrale**, etc.

Cependant, la moyenne arithmétique empirique est sensible aux **valeurs extrêmes** de ses composantes X_n (cf **aberration**, **moyenne censurée**, **courbe de sensibilité**, **robustesse**). On doit donc souvent la corriger (cf **correction**, **moyenne équilibrée**).

D'autre part, il existe des caractéristiques de centralité analogues à la moyenne arithmétique, mais qui peuvent lui être préférées (eg **médiane** ou mode), et dont le choix peut dépendre de la **forme légale** de P^{ξ}.