MOYENNE ÉQUILIBRÉE (C5, C9, F3, F8, G8)
(01 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **moyenne équilibrée** est une **moyenne** dont le calcul revient à éliminer des **valeurs extrêmes**, dont le nombre peut être inégal entre extrémités (cf **moment équilibré**).

(i) Soit F la **fonction de répartition** associée à la **loi de probabilité** d'une **vars** ξ, et $(\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$ un couple tq $0 < \alpha + \beta < 1$.

On appelle **moyenne non équilibrée** (**théorique**) de ξ le nombre :

$$(1) \qquad \mu_F(\alpha, \beta) = (1 - \alpha - \beta)^{-1} \int F^{-1}(y)\, dy,$$

où $F^{-1}(y) = \inf \{x \in \mathbf{R} : F(x) \geq y\}$ désigne la **fonction quantile**.

En particulier, si $\beta = \alpha$, $\mu_F(\alpha, \alpha)$ est notée $\mu_F(\alpha)$ et on l'appelle **moyenne équilibrée** (théorique) de ξ.

(ii) Si l'on dispose d'un N-**échantillon** issu de ξ, on appelle **moyenne non équilibrée** (**empirique**) de ξ (ou de X) la **statistique** suivante, obtenue en remplaçant dans (1) F par la **fonction de répartition empirique** F_N associée à X, ie (cf **statistique naturelle**) :

$$(2) \qquad \overline{X}_N(\alpha, \beta) = (N - [N\alpha] - [N\beta])^{-1} . \{A^{(N,\alpha)} + X^{([N\alpha]+2)} + ... + X^{(N-[N\beta]-1)} + B^{(N,\beta)}\},$$

où $X^{(.)} = (X^{(1)}, ..., X^{(N)})$ désigne l'échantillon ordonné (de façon croissante) associé à X (cf **statistique ordonnée**), [.] dénote la fonction **partie entière**, et :

$$(3) \qquad \begin{aligned} A^{(N,\alpha)} &= ([N\alpha] - N\alpha + 1)\, X^{([N\alpha]+1)}, \\ B^{(N,\beta)} &= ([N\beta] - N\beta + 1)\, X^{(N - [N\beta])}. \end{aligned}$$

En particulier, si $\beta = \alpha$, $\overline{X}_N(\alpha, \alpha)$ est notée $\overline{X}_N(\alpha)$ et on l'appelle **moyenne équilibrée** (**empirique**) de ξ (ou de X).

A titre d'exemple, lorsque $\alpha \to 1/2$, on obtient la **médiane empirique**, ie : $\overline{X}_N(1/2) = q_{1/2}\, X$.

(iii) Sous des hypothèses larges (portant sur F), et si X est un **échantillon iid** comme la **variable parente** ξ (ie selon la **fr** F), on montre que :

$$(4) \qquad \mathscr{L}\{N . (\overline{X}_N(\alpha) - \mu_F(\alpha))\} \to_{N \to +\infty} \mathscr{N}(0, \sigma_\alpha^2)$$ (**loi normale** centrée),

où σ_α^2 désigne la **variance « winsorisée »** (théorique, ie calculée avec F) d'ordre α, ie (cf **transformation de WINSOR**) :

$$(5) \qquad \sigma_\alpha^2 = (1 - 2\alpha)^{-2} . \int b_\alpha \{x - c(\alpha)\}^2\, dF(x) + \alpha . \sigma_\alpha^2,$$

avec :

$$\sigma_\alpha^2 = (\alpha - c(\alpha))^2 + (\beta - c(\alpha))^2,$$

(6) $$c(\alpha) = \int b_\alpha x \, dF(x) + \alpha(\alpha + \beta),$$

$$a = F^{-1}(\alpha), \quad b = F^{-1}(1 - \alpha).$$

En pratique, on doit estimer σ_α^2.

(iv) Dans le cas « empirique », il existe deux définitions de (non) équilibrage :

(a) le **(non) équilibrage de type I** précédent, dans lequel c'est eg la **proportion** α du nombre de valeurs éliminées qui est fixée. C'est ce qui explique le recours à la fonction « partie entière » ;

(b) le **(non) équilibrage de type II**, dans lequel c'est le nombre des valeurs éliminées qui est lui-même fixé. Ainsi, pour la moyenne empirique, on pose :

(7) $$\overline{X}_N(L, M) = \{N - (L + M)\}^{-1} . \{X^{(L+1)} + ... + X^{(N-M)}\},$$

ce qui correspond au cas où $[N\alpha] = L < [N/2]$ et $[N\beta] = m < [N/2]$. Ici, L et M sont fixés.

(v) La notion de moyenne équilibrée (resp non équilibrée) s'étend directement en celle de **moment équilibré** (resp **moment non équilibré**), dont elle est un cas particulier.

(vi) Ces concepts interviennent notamment en relation avec la **censure** des échantillons ou la **troncature** des lois, ainsi qu'en théorie de la **robustesse** : estimation ou tests eg de **paramètre de position** et de **paramètre d'échelle**.