

MOYENNE HARMONIQUE (C5, F3)

(31 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Comme la **moyenne arithmétique** ou la **moyenne géométrique**, la **moyenne harmonique** est une **ϕ -moyenne** particulière.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+^*$ une **vars** positive dont la **loi** est notée P^ξ .

On appelle **moyenne harmonique** (théorique) de ξ (ou de P^ξ) le nombre réel (s'il existe) H_ξ tq (**moyenne dans L^p** , avec $p = -1$) :

$$(1) \quad (H_\xi)^{-1} = E \xi^{-1} = \int x^{-1} dP^\xi(x).$$

(ii) On montre que :

(a) si $\xi \in L_{\mathbf{R}^+}^{-1}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors H_ξ existe et :

$$(2) \quad H_\xi \leq E \xi \quad (\text{espérance mathématique de } \xi);$$

(b) d'après l'**inégalité de JENSEN** :

$$(3) \quad (E \xi) \cdot (E \xi^{-1}) \geq 1.$$

(iii) Soit $X = (X_1, \dots, X_N)$ un **échantillon iid** selon P^ξ .

On appelle **moyenne harmonique (empirique) simple** de ξ (ou de X) la **va** H_N tq :

$$(4) \quad H_N^{-1} = \int x^{-1} dP_N(x) = N^{-1} \cdot \sum_{n=1}^N X_n^{-1},$$

où P_N désigne la **loi empirique** associée à X .

Etant donné $\lambda \in S_N$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^N$), on appelle **moyenne harmonique (empirique) pondérée** (selon λ) de ξ (ou de X) la va $H_N(\lambda)$ tq :

$$(5) \quad (H_N(\lambda))^{-1} = \int x^{-1} dL_N(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n X_n^{-1},$$

où $L_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n \delta(X_n)$ est une **mesure discrète** associée à λ et $\delta(x)$ désigne la **masse de DIRAC** placée au point x .

(iv) Une moyenne harmonique peut être définie, de façon analogue, pour une **variable qualitative** valuée.