MOYENNE MOBILE (N2-N3, N9)
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le calcul d'une **moyenne mobile** revient à effectuer un **filtrage** linéaire particulier.

Ce filtrage sert eg à estimer la **composante** non saisonnière d'un **processus** ou d'une **série temporelle**.

La notion de moyenne mobile est à l'origine de notions tq celle de **processus de moyenne mobile** ou de **processus autorégressif de moyenne mobile**.

(i) Soit $x = (x_t)_{t=1,...,T}$ une série temporelle scalaire dans laquelle T est un **groupe** additif ordonné, $\lambda \in S_p$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^p$) et $(h_1 ,..., h_p)$ une **suite** tq $h_1 \leq ... \leq h_p$.

On appelle (opération de) **moyenne mobile de longueur p, pondérée selon λ et de pas $(h_1 ,..., h_p)$** l'application qui associe à x la série temporelle $y = (y_t)_{t \in U}$ définie par la **moyenne arithmétique** pondérée :

(1) $\quad y_t = \Sigma_{j=1}^p \lambda_j x_{t+h(j)}$,

où l'on suppose que $U \subset T$ et que $t + h_j \in U$, $\forall j \in N_p*$. On note par commodité h(j) pour désigner les h_j .

L'application $x \mapsto y$ ainsi définie est notée eg $\mathscr{M}_p (\lambda)$ ou $\mathscr{M}_p$.

Ainsi, lorsque $\lambda = p^{-1} e_p \in S_p$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^p$) et $h_j = j$, $\forall j \in N_p*$, on obtient la **moyenne mobile simple** $x_t \mapsto y_t = p^{-1} \Sigma_{j=1}^p x_{t+j}$.

(ii) On montre que :

(a) $\mathscr{M}_p$ est une opération linéaire (cf **opérateur linéaire**), puisque y_t est **combinaison linéaire convexe** des termes $x_{t+h(j)}$;

(b) les **invariants** par $\mathscr{M}_p$ sont les fonctions affines de t, ie :

(2) $\quad x_t = a + b\,t \Rightarrow \mathscr{M}_p (x_t) = x_t , \qquad \forall t \in U$;

(c) si $h_j = j$, $\forall j \in N_p*$, on a l'équivalence :

(3) $\quad \mathscr{M}_p (x_t') = \mathscr{M}_p (x_t'') \Leftrightarrow d_t = x_t' - x_t''$ vérifie la propriété Pr (d),

où Pr (u) = {u est une série temporelle périodique de **période** p et tq $\mathscr{M}_p (u_t) = 0$, $\forall t \in U$}. Par série périodique de période p, on signifie que : $u_{t + k p} = u_t$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

(iii) En pratique, la méthode « empirique », ou « spontanée », de **lissage par moyenne mobile** d'une série temporelle possède deux inconvénients :

(a) elle « perd » des observations (observations extrêmes) lorsque les séries sont finies et de faible « champ temporel » (Card T $<<$ $+\infty$) ;

(b) elle peut conduire à l'**effet de E.E. SLUTZKY**. En effet, les **points de retournement** de y peuvent être décalés (avec avance ou **retard**) pr à ceux de x, ce qui fausse la **prévision** fondée sur y (en termes de **datation**, donc aussi en termes d'**amplitude**) (cf **opérateur avance**).

(iv) On peut définir, de façon analogue, une notion de moyenne mobile pour des séries dont le **temps** est de différents types : eg temps discret, temps continu.

Ainsi, dans le cas où x = $(x(t))_{t \in T}$ est en temps continu, $T \subset \mathbf{R}$ (doté de sa **mesure de LEBESGUE** λ_1), la moyenne mobile peut s'écrire sous la forme :

(1)' $\quad y(t) = \int_U \lambda(h) \,.\, x(t+h)\, d\lambda_1(h),$

où l'on suppose que $\lambda : U \mapsto \mathbf{R}_+$ est une **fonction de poids** (ie tq $\lambda \geq 0$ et $\int_U \lambda(h)\, d\lambda_1(h) = 1$), $U \subset T$ et que $t + h \in U$, $\forall\, h \in \mathbf{R}$.

(v) Pour définir une **transformation mobile** du type précédent, il est aussi possible d'utiliser :

(a) d'autres types de **moyennes** : **moyenne potentielle** (eg **moyenne géométrique**, **moyenne harmonique**), **φ-moyenne**, etc ;

(b) ou d'autres types de **« centralité »** : eg la **médiane**, qui porte vers la notion de **médiane mobile**.