

MOYENNE POTENTIELLE (C5, F3)

(31 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **moyenne potentielle** généralise les notions de **moyenne** usuelles : elle est basée sur la notion de « **fonction puissance** ». Une notion comparable est celle de **moyenne exponentielle** (dans laquelle la puissance est remplacée par l'exponentiation).

(i) Soit $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ une **vars** non négative tq $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (puissance p -ième intégrable, avec $p \in \mathbf{R}_+^*$) et dont la **loi de probabilité** est P^ξ .

On appelle **moyenne dans L^p** , ou **moyenne potentielle d'ordre p , (théorique)** le nombre $\mu_p(\xi)$ défini par (cf **moyenne dans L^p**) :

$$(1) \quad (\mu_p(\xi))^p = \int x^p dP^\xi(x).$$

Cette définition suppose que les opérations d'élévation à la puissance p ont un sens.

(ii) Soit $X = (X_1, \dots, X_N)$ un **échantillon aléatoire** constitué de vars non négatives $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ et $p \in \mathbf{N}^*$ (eg N **copies** de la **variable parente** ξ précédente).

On appelle **moyenne potentielle d'ordre p (empirique)** associée à X la **statistique** $X_N(p)$ tq :

$$(2) \quad (X_N(p))^p = N^{-1} \sum_{n=1}^N X_n^p.$$

La formule (2) se déduit donc de (1) en y remplaçant P^ξ par la **loi empirique** P_N associée à X .

(iii) On peut étendre les notions précédentes à des **variables signées** $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ en utilisant la notion de **valeur absolue** et en posant :

$$(1)' \quad (\mu_p(\xi))^p = \int |x|^p dP^\xi(x),$$

$$(2)' \quad (X_N(p))^p = N^{-1} \sum_{n=1}^N |X_n|^p.$$

(iv) La moyenne potentielle généralise les moyennes classiques : **moyenne arithmétique** ($p = 1$), **moyenne géométrique** ($p \rightarrow 0+$) ou **moyenne harmonique** ($p = -1$).

La notion admet, comme cas limite, la **statistique extrême** (supérieure) de X , ie $X_n(+\infty) = X^{(N)}$ (où $X^{(N)}$ est la dernière coordonnée de l'échantillon ordonné de façon croissante associé à X) (cf **statistique des extrêmes**, **statistique d'ordre**, **valeur extrême**).

(v) Une moyenne potentielle peut être définie, de façon analogue, pour une **variable qualitative** valuée.