NORME (A3, A4)
(01 / 12 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Dans son sens général, une **norme** est un concept de référence, auquel on peut rapporter d'autres concepts de même nature. En Mathématique (algèbre linéaire), ce terme possède le sens précis suivant.

Soit E un **espace vectoriel** sur un corps **K** (avec **K** = **R** ou **K** = **C**).

(i) On appelle **norme** sur E, et l'on note eg $||.||$, une **application** (**fonction numérique**) de E dans $\mathbf{R}_+$ tq :

(a) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation) ;

(b) $||\lambda . x|| = |\lambda| . ||x||$, $\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$, (**homothétie**) où $|\lambda|$ désigne la **valeur absolue** (resp le module) de $\lambda \in \mathbf{K}$;

(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (**inégalité triangulaire**, ou **inégalité du triangle**) (cf aussi **inégalité de MINKOWSKI**).

(ii) On dit que le couple (E, $||.||$) est un **espace (vectoriel) normé**.

(iii) Si (a) est remplacé par la condition moins restrictive :

(d) $x = 0 \Rightarrow ||x|| = 0$,

on définit seulement une **semi-norme** $||.||$ sur E (cf **semi-norme**), et le symbole (E, $||.||$) désigne alors un **espace semi-normé**.

(iv) Une norme se note de diverses façons : eg $||.||$, N ou N (.), ν ou ν (.), ou même simplement $|.|$. Ceci est courant lorsqu'on considère plusieurs espaces normés.

(v) Si $||.||$ est une norme sur E, l'application $(x, y) \in E^2 \mapsto d(x, y) = ||x - y||$ est une **distance** sur E, appelée **distance associée à la norme** $||.||$. (E, d) est alors un **espace métrique** pour cette distance.

De même, si $||.||$ est une semi-norme sur E, l'application $(x, y) \in E^2 \mapsto d(x, y) = ||x - y||$ est une **semi-distance** sur E, appelée **semi-distance associée à la semi-norme** $||.||$. (E, d) est alors appelé **espace semi-métrique** pour cette semi-distance.

(vi) Soit (E, $||.||_E$) et (F, $||.||_F$) deux **espaces normés** et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire continue.

On appelle **norme** de $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et l'on note $||f||$, ou parfois $|||f|||$, le nombre réel défini selon :

(1) $\quad ||f|| = \inf \{a \in \mathbf{R}_+ : ||f(x)||_F \leq a \, ||x||_E\}$.

On montre que cette norme vérifie la propriété suivante :

(2) $||f|| = \sup_{||x||E \leq 1} ||f(x)||_F$,

où $||x||E$ dénote (par commodité) $||x||_E$.

L'ensemble $\mathscr{L}$ (E, F) des applications linéaires continues est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel normé. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, les normes sont notées avec un même symbole, eg ||.||. Dans un **espace euclidien**, cette dernière notation désigne généralement la norme euclidienne $x \mapsto ||x|| = (x' x)^{1/2}$.

(vii) La notion intervient dans de nombreux contextes (cf eg **norme matricielle**).