NOYAU (A3-A5, A9, D1, N)
(27 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le terme **noyau** peut comporter diverses acceptions.

(i) Soit E un **ensemble** quelconque et **K** = **R** (resp **K** = **C**).

On appelle **noyau** sur E toute fonction K : $E^2 \mapsto$ **K**, aussi notée eg N ou H. Lorsque **K** = **R** (resp **K** = **C**), on parle de **noyau réel** (resp **noyau complexe**).

On dit que K est un **noyau hermitien**, ou un **noyau symétrique**, ssi il possède la propriété de **symétrie hermitienne**, ie :

(1) $K(y, x) = \overline{K}(x, y), \qquad \forall (x, y) \in E^2,$

où $\overline{z}$ dénote le nombre complexe conjugué de z.

On dit que K est un **noyau de type positif** ssi, pour toute fonction f : E $\mapsto$ **K** à **support** fini, on a (cf aussi **noyau reproduisant**) :

(2) $\Sigma_x \Sigma_y\ f(x) . K(x, y) . \overline{f}(y) \geq 0.$

(ii) En **calcul des probabilités**, E est généralement un **espace mesuré** (E, $\mathscr{A}$, μ).

On appelle alors **noyau** sur E toute fonction ($\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, $\mathscr{B}_{\mathbf{K}}$)-mesurable K : $E^2 \mapsto$ **K** , où $\mathscr{B}_{\mathbf{K}}$ désigne la **tribu borélienne** de **K** (avec **K** = **R** ou **K** = **C**).

(iii) La notion de noyau permet de définir de nombreuses **transformations intégrales**, linéaires ou non, dans $L_{\mathbf{K}}^2(E, \mathscr{A}, \mu)$. C'est le cas eg en analyse fonctionnelle ou en **analyse spectrale** des **opérateurs**.

Ainsi, si l'on considère un noyau K $\in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}^2$ (E x E, $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, $\mu \otimes \mu$), on dit que K est un **noyau de E.I. FREDHOLM**.

Par suite, si f $\in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}^2$ (E, $\mathscr{A}$, μ), la fonction g définie par :

(3) $g(y) = \int K(x, y)\, f(x)\, d\mu(x), \qquad \forall y \in E,$

est tq g $\in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}^2(E, \mathscr{A}, \mu)$. De plus, l'application u : f $\mapsto$ g ainsi définie est un **endomorphisme** continu de $L_{\mathbf{K}}^2$ (E, $\mathscr{A}$, μ). Toute équation de la forme :

(4) $u(f) - \lambda f = h,$

dans laquelle $\lambda \in$ **K** et h $\in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}^2$ (E,$\mathscr{A}$,μ) est donnée, s'appelle **équation intégrale (linéaire) de V. VOLTERRA** (cf **équation intégrale**). En pratique, on note souvent avec le même symbole (ie K) l'endomorphisme continu u et le noyau K.

(iv) En **Statistique**, la notion de noyau intervient dans le cadre de l'**estimation non paramétrique de la densité** (cf **estimateur de la densité**, **méthode du noyau**).

Plus généralement, soit $\mathscr{P}^X$ une famille de **lp** P^X, (Γ, $\mathscr{B}_\Gamma$) un espace de **caractéristiques** γ = c (P^X) $\in \Gamma$ et T = t (X) un **estimateur** de γ. Si γ est **estimable**, ie si T est sans **biais** :

(5) $\quad$ E T = γ,

on appelle **noyau** de γ (ou de T) l'application mesurable t elle-même. En général, si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_0^N$ et X = (X_1 ,..., X_N) (eg N-**échantillon**), l'**application mesurable** t est supposée symétrique. Sinon, on la remplace par un **noyau symétrique** t_σ , classiquement défini par :

(6) $\quad$ t_σ (X) = $(N\,!)^{-1} \Sigma_{\sigma \in \boldsymbol{\sigma}N}$ t ($X_{\sigma(1)}$,..., $X_{\sigma(N)}$).

(iv) Il existe encore deux autres notions courantes de noyau : cf **noyau d'une application linéaire** et **noyau stochastique**.