

## NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE (A3)

(27 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **noyau d'une application linéaire** est une notion classique d'algèbre linéaire qui reçoit de nombreuses applications en **Statistique** multidimensionnelle (cf **analyse multidimensionnelle**) : **analyse des données**, **modèle linéaire**, **modèle de régression**, **modèle d'interdépendance**, etc.

(i) Soit  $E$  et  $F$  deux **espaces vectoriels** sur un même corps commutatif  $\mathbf{K}$  et  $f \in \text{Hom}(E, F)$  un **endomorphisme**.

On appelle **noyau** de  $f$ , et l'on note  $\text{Ker } f$ , le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par :

$$(1) \quad f^{-1}(0) = \{x \in E : f(x) = 0\} \triangleleft E.$$

où  $A \triangleleft E$  signifie que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(ii) Dans le cadre précédent, on suppose que  $\dim E = n$  et  $\dim F = m$ . Soit  $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$  la **matrice** représentative de  $f$  dans des **bases** données.

On appelle **noyau** de  $A$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}^n$  défini par :

$$(2) \quad \text{Ker } A = A^{-1} 0 = \{x \in E : Ax = 0\} \triangleleft \mathbf{K}^n.$$

On identifie alors le vecteur colonne  $x \in \mathbf{K}^n$  (ou  $x \in M_{n1}(\mathbf{K})$ ) au vecteur  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ , exprimé dans la **base canonique**  $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ .

On montre que, si  $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$ , alors :

$$(3) \quad \text{Ker } A' = (\text{Im } A)^\perp \quad (\text{supplémentaire orthogonal de l'image } \text{Im } A).$$