

OPÉRATEUR ADJOINT (A3, A4)

(16 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Soit E un **espace pré-hilbertien** muni d'une **forme hermitienne** positive (non dégénérée) h et f un **opérateur** dans E . On pose $h(x, y) = (x | y)$ (**produit scalaire** de x et y), $\forall (x, y) \in E^2$.

(i) On appelle **opérateur adjoint** de f un opérateur dans E , noté f^* , tq :

$$(1) \quad (f(x) | y) = (x | f^*(y)), \quad \forall (x, y) \in E^2.$$

On montre que :

(a) si f^* existe, il est unique et $(f^*)^* = f$;

(b) si f et g admettent pour adjoints resp f^* et g^* , alors :

$$(f + g)^* = f^* + g^*,$$

$$(2) \quad (\lambda \cdot f)^* = \bar{\lambda} \cdot f^*, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \text{ (où } \bar{\lambda} \text{ est le complexe conjugué de } \lambda),$$

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* ;$$

(c) si f est continu et admet f^* pour adjoint, alors f^* est continu ;

(d) si E est un **espace de HILBERT**, tout opérateur continu dans E admet un adjoint (cf **continuité**).

(ii) On dit que l'opérateur f dans E est un **opérateur auto-adjoint** ssi son adjoint f^* existe et que $f^* = f$. On montre alors que :

(a) si f est auto-adjoint, l'application $(x, y) \mapsto (f(x) | y) = \overline{h(f(y) | x)} = (f(y) | x)^{cc}$ est une **forme hermitienne** sur E (on note z^{cc} le complexe conjugué de z) ;

(b) si f admet un adjoint f^* , alors $f + f^*$ et $i(f - f^*)$ sont auto-adjoints (i = imaginaire pure).

(iii) On appelle **opérateur positif** (resp **opérateur non dégénéré**) un opérateur auto-adjoint f dont la forme hermitienne associée est positive (resp non dégénérée).