OPÉRATEUR AVANCE, OPÉRATEUR RETARD (A16, J8, N3, N9)
(26 / 12 / 2018)

Notion commode dans des calculs relatifs à une **équation de récurrence**, ou à une équation aux **différences finies**, ou à un **processus** dans la définition duquel interviennent des « décalages » (avances ou **retards**) (cf aussi **opérateur de translation**). C'est le concept de **temps** qui est donc concerné.

(i) Soit E un **ensemble** quelconque et $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une **suite** sur E. On appelle **opérateur avance** l'opérateur $F : E \mapsto E$ défini par :

(1) $\quad x_n \mapsto F(x_n)$ ou $F x_n = x_{n+1}$, $\quad \forall n \in \mathbf{Z}$.

On appelle **opérateur retard** l'opérateur $B : E \mapsto E$ défini par :

(2) $\quad x_n \mapsto B(x_n)$ ou $B x_n = x_{n-1}$, $\quad \forall n \in \mathbf{Z}$.

L'opérateur avance F (de l'anglais « *forward* ») est aussi noté A ou L_+ (de l'anglais « *lead* »). L'opérateur retard B (de l'anglais « *backward* ») est aussi noté R ou L_- (de l'anglais « *lag* »), ou encore simplement L.

(ii) Les propriétés de base de ces opérateurs sont liées à leurs itérés :

(a) $F x_n = x_{n+1} \Rightarrow F^h x_n = F(F^{h-1} x_n) = x_{n+h}$, $\quad \forall (n, h) \in \mathbf{Z}^2$;

(b) $B x_n = x_{n-1} \Rightarrow B^h x_n = B(B^{h-1} x_n) = x_{n-h}$, $\quad \forall (n, h) \in \mathbf{Z}^2$.

(iii) Les opérateurs précédents sont des opérateurs dans des espaces de suites sur E. En effet, si $E^{\mathbf{Z}}$ est l'espace des suites d'éléments de E indexées par **Z** et si $x \in E^{\mathbf{Z}}$, on définit l'**opérateur avance** $\mathscr{F}$ comme opérateur dans $E^{\mathbf{Z}}$ tq :

(3) $\quad x \mapsto \mathscr{F}(x)$ ou $\mathscr{F} x = y \Leftrightarrow y_n = F x_n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

De même, on définit l'**opérateur retard** $\mathscr{B}$ comme opérateur dans $E^{\mathbf{Z}}$ tq :

(4) $\quad x \mapsto \mathscr{B}(x)$ ou $\mathscr{B} x = y \Leftrightarrow y_n = B x_n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

(iv) Les notions précédentes se retrouvent eg en **théorie des processus** ou dans l'**analyse des modèles** (eg de **régression** ou d'**interdépendance**, etc) portant sur des données temporelles (cf **série temporelle**), ie impliquant la notion de **modèle dynamique** : **processus autorégressif** ou **modèle autorégressif**, **processus autorégressif de moyenne mobile**, **modèle à retards échelonnés**.

En particulier, si $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus réel scalaire (ie à **espace d'état** $\mathscr{X} = \mathbf{R}$) et en temps discret (eg $T = \mathbf{Z}$), on montre que :

(a) un **« polynôme formel »** de degré H peut prendre les formes suivantes :

(5) $(\Sigma_{h=1}{}^{H}\ \alpha_h\ B^h)\ X_t\ =\ (\Sigma_{h=1}{}^{H}\ \alpha_h\ (B^h\ X_t)\ =\ \Sigma_{h=1}{}^{H}\ \alpha_h\ X_{t-h}$;

(b) si X est un **processus stationnaire en covariance** et si $\Sigma_{h=1}{}^{+\infty}\ |\alpha_h| < +\infty$, alors :

(6) $(\Sigma_{h=1}{}^{+\infty}\ \alpha_h\ B^h)\ X_t\ =\ \Sigma_{h=1}{}^{+\infty}\ \alpha_h\ (B^h\ X_t)\ =\ \Sigma_{h=1}{}^{+\infty}\ \alpha_h\ X_{t-h}$;

(7) $|\lambda| < 1\ \Rightarrow\ (id_{\mathbf{R}} - \lambda\ B)^{-1}\ X_t\ =\ (\Sigma_{h=0}{}^{+\infty}\ \lambda^h\ B^h)\ X_t\ =\ \Sigma_{h=0}{}^{+\infty}\ \lambda^h\ X_{t-h}$.

(v) Les opérateurs avance et retard permettent ainsi de définir des opérateurs complexes, le plus souvent polynômiaux.

Par exemple, si P est un polynôme de degré d° P = H sur **C**, on définit l'**opérateur polynômial** :

(5) $P\ (B)\ =\ \Sigma_{h=0}{}^{H}\ p_h\ B^h$,

où $(p_h)_{h=0,1,\ldots,H}$ est la suite des coefficients de P.

On définit aussi des séries entières à partir de l'**opérateur sériel** :

(6) $S\ (B)\ =\ \Sigma_{h\ \in\ \mathbf{N}}\ p_h\ B^h$.