OPÉRATEUR COMPACT (A3, A4, C5, N)
(16 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E et F deux **espaces vectoriels normés** sur **K** = **R** (resp **K** = **C**) et f $\in$ Hom (E, F) (cf **homomorphisme**).

On dit que f $\in$ Hom (E, F) est une **application linéaire compacte** ssi, pour toute **partie bornée** B $\subset$ E, l'image f (B) est une **partie relativement compacte** dans F.

Si, de plus, F = E, on dit que f est un **opérateur compact**.

(ii) On montre que :

(a) f est une application compacte ssi, pour toute **suite** bornée x = $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, il existe une suite extraite $(x_{n(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ tq la suite $(f(x_{n(k)}))_{k \in \mathbf{N}}$ converge dans F ;

(b) si f est compacte, elle est continue (ie f $\in \mathscr{L}$ (E, F)).

(iii) Un exemple classique d'opérateur compact se rencontre dans le cadre de l'**équation intégrale**. Soit I = [a, b] $\subset$ **R**, E = $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}$ (I) l'**espace de BANACH** des fonctions continues x : I $\mapsto$ **C** et $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}$ (I^2) l'espace de BANACH des **noyaux** continus K : $I^2 \mapsto$ **C**. L'application y : I $\mapsto$ **C** définie par :

(1) $$y(t) = \int_I K(s, t)\, x(s)\, ds, \qquad \forall\, t \in I,$$

est tq y $\in \mathscr{C}_{\mathbf{C}}$ (I) et elle définit un opérateur linéaire compact f dans E selon :

(2) $$x \in E \mapsto f(x) = y.$$

Si E est doté de la **forme hermitienne** :

(3) $$(x, y) \mapsto (x \mid y) = \int_I x(t)\, \overline{y}(t)\, dt,$$

où $\overline{y}$ (t) désigne le nombre complexe conjuqué de y (t), alors E est pré-hilbertien (cf **espace de HILBERT**). K est appelé **noyau de l'opérateur** f (on note souvent K comme f, ou inversement).

Si K est un **noyau hermitien**, ie si :

(4) $$K(s, t) = \overline{K}(t, s), \quad \forall\, (s, t) \in T^2),$$

l'opérateur compact f est un **opérateur auto-adjoint** (cf **opérateur adjoint**).

(iii) Les notions précédentes interviennent souvent dans l'étude des **processus stationnaires en covariance**, l'**opérateur de covariance** d'un tel processus jouant le rôle d'opérateur compact dans un espaces de **va** ad hoc.