**OPÉRATEUR DE COVARIANCE (C5)**
(06 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **covariance** (donc celle de **variance**) se généralise au cas où les **va** prennent leurs valeurs dans un espace général (espace de HILBERT ou **espace de BANACH**). On parle alors plutôt d'**opérateur de covariance**.

(i) Si **K** = **R** (resp **K** = **C**), on note $(E, (. \mid .)_E)$ un **espace de HILBERT** sur le corps **K**, dont la forme hilbertienne associée est notée $(. \mid .)_E$ . Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé**. On définit l'espace $L_E^2 \lhd (\Omega, \mathscr{T}, P)$ comme l'espace des (classes de) va $\xi : \Omega \mapsto E$ de carré intégrable. Autrement dit, si E' est le **dual topologique** de E, et si $< . , . >_E$ dénote le **produit scalaire** canonique défini sur E' x E, l'**espérance** $E\,\xi$ de $\xi$ est définie selon :

(1) $\quad < x' , E\,\xi >_E \; = \; E < x' , \xi >, \quad \forall x' \in E',$

où l'on suppose que $E\,\|\xi\|_E^2 < +\infty$, et que $\|\xi\|_E = (\xi \mid \xi)_E^{1/2}$ désigne la norme hilbertienne associée au produit scalaire $(. \mid .)_E$ .

Par suite, si $(E, (. \mid .)_E)$ et $(F, (. \mid .)_F)$ sont deux espaces de hilbert sur **K** et si $\xi \in L_E^2$ et $\eta \in L_F^2$ sont deux **éléments aléatoires** donnés, on peut définir sur E' x F' une fonction $\Gamma(\xi, \eta)$ à valeurs dans **K** tq :

(2) $\quad (x', y') \in E' \times F' \;\mapsto\; \Gamma(\xi, \eta)(x', y') \; = \; E < x', \xi >_E < y', \eta >_F ,$

en posant $x = h_E^{-1}(x')$ et $y = h_F^{-1}(y')$, les applications $h_E$ et $h_F$ étant tq :

(3) $\quad h_E : E \mapsto E'$ vérifie : $< h_E(t), x >_E \; = \; (x \mid t)_E , \quad \forall x \in E$ (de même pour $h_F$).

On appelle alors **opérateur de covariance** de $\xi$ et de $\eta$ l'**application linéaire** $C(\xi, \eta) : F \mapsto E$, ou **homomorphisme** $C(\xi, \eta) \in$ Hom (F, E), défini(e) par :

(4) $\quad C(\xi, \eta)(y) \; = \; E\,(y \mid \eta)_F\, \xi, \qquad \forall y \in F.$

On obtient ainsi la relation :

(5) $\quad \Gamma(\xi, \eta)(x', y') \; = \; (C(\xi, \eta)(y) \mid x)_E .$

(ii) L'opérateur de covariance vérifie les propriétés suivantes :

(a) $|C(\xi, \eta)| \;\leq\; E\,\|\xi\|_E \,.\, \|\eta\|_F$ ;

(b) $C(\eta, \xi) \; = \; C(\xi, \eta)^*$ (**opérateur adjoint** de $C(\xi, \eta)$) ;

(c) si $A \in \mathscr{L}(E)$ et $B \in \mathscr{L}(F)$, alors :

(6) $\quad C(A\,\xi, \eta) \; = \; A \,.\, C(\xi, \eta) \;$ et $\; C(\xi, B\,\eta) \; = \; C(\xi, \eta) \,.\, B^*$ ;

(d) si $C(\xi, \eta) = 0$, on dit que $\xi$ et $\eta$ sont sans **corrélation**, ou que ce sont des **vecteurs aléatoires** non corrélés.

En particulier, si $F = E$ et $(. \mid .)_F = (. \mid .)_E$ , on appelle **(auto)covariance** de $\xi$ l'application linéaire $C(\xi, \eta) \in \mathcal{L}(E)$ (cf **autocovariance**). Cette dernière est alors souvent notée $V\xi$ ou $V(\xi)$. Si Dim E = n, on retrouve la définition de la **matrice de covariance** $V\xi$ du vecteur aléatoire $\xi$.

(ii) La notion d'opérateur de covariance s'étend directement en remplaçant les espaces de HILBERT par des **espaces de BANACH**. Si $(E, \|.\|)$ est un espace de BANACH réel séparable, dont le **dual topologique** est E' et le produit scalaire canonique $< . , . > : E' \times E \mapsto \mathbf{R}$, si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé et $\xi : \Omega \mapsto E$ un **élément aléatoire** (ie un vecteur aléatoire à valeurs dans un espace de BANACH) tq $E\,\xi = 0$ (élément centré), ie tq :

(7) $\quad E < x', \xi > = 0, \qquad \forall x' \in E',$

on appelle **fonction de covariance** de $\xi$ la **forme bilinéaire** $C(\xi, \xi) : E' \times E' \mapsto \mathbf{R}$ définie selon :

(8) $\quad C(\xi, \xi)(x_1', x_2') = E < x_1', \xi > < x_2', \xi >, \qquad \forall (x_1', x_2') \in E' \times E'.$

En particulier, si E est un espace de HILBERT, si l'on identifie E' à E et si l'on suppose que $\xi : \Omega \mapsto E$ est centré (ie $E < x', \xi > = 0, \forall x' \in E'$) et de carré intégrable (ie $E(< x', \xi >)^2 < +\infty, \forall x' \in E'$), alors l'opérateur de covariance de $\xi$ est défini comme l'**intégrale faible** (f) de l'élément aléatoire $< x', \xi >$ pr à P (cf **intégrale de PETTIS**) :

(9) $\quad C(\xi)(x') = (f) \int \xi < x', \xi > dP, \qquad \forall x' \in E'.$

Le **théorème de transfert des mesures** conduit à l'expression équivalente :

(10) $\quad C(\xi)(x') = (f) \int x < x', x > dP^{\xi}(x), \qquad \forall x' \in E',$

où $P^{\xi}$ est l'image de P par $\xi$.