OPÉRATEUR DIFFÉRENCE FINIE (A3, A7, A16, N3)

(08 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'opérateur « **différence finie** » définit, pour une **suite**, une opération analogue à celle de **dérivation** pour une **application**. C'est donc l'analogie, pour le cas « discret », d'un calcul de **dérivée**, pour le cas « non discret ».

Cet opérateur s'associe aussi avec les **opérateurs avance et retard**, très utilisés dans l'étude des équations aux **différences finies**, et dans celle d'un **processus stochastique** ou d'un **modèle dynamique** (cf eg **modèle d'interdépendance dynamique**), dans lesquels interviennent des variables décalées.

(i) Soit G et H deux **groupes** abéliens additifs, $f : G \mapsto H$ une application quelconque et $h \in G$.

On appelle **différence première**, ou **différence d'ordre 1, de pas** (ou d'**incrément**) h au point $x \in G$ l'application $\Delta_h : G \mapsto H$ définie selon :

$$(1) \quad f(x) \mapsto \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

On appelle alors (**opérateur**) **différence (finie) d'incrément h** l'application $\Delta_h f$, définie sur H^G et à valeurs dans H , dont la valeur en tout point $x \in G$ est définie par (1).

(ii) Si H est un **espace vectoriel** sur un corps $\mathbf{K}$, l'opération Δ_h est une **application linéaire**. On suppose le plus souvent que $G = \mathbf{R}$ et que F est un **espace vectoriel normé** réel. On définit alors $\Delta_h f(x)$ par la relation (dans laquelle on suppose $h > 0$) :

$$(2) \quad f(x) \mapsto \Delta_h f(x) = \{f(x+h) - f(x)\} / \{(x+h) - x\} = \{f(x+h) - f(x)\} / h,$$

ce qui permet de rapprocher, au moins formellement, les propriétés de Δ_h et celles de dérivation d'une fonction vectorielle (cf **dérivée, différentiabilité**).

(iii) La définition (1) est aussi appelée **différence « avant »**. Une définition alternative est celle de **différence « arrière »**, ie :

$$(3) \quad f(x) \mapsto \Delta_h' f(x) = f(x) - f(x-h).$$

(iv) L'opération différence (1) peut être itérée (produit de composition des applications). On appelle **différence finie p -ième**, ou **d'ordre p , de pas (ou d'incrément) h** au point $x \in G$, l'opération $\Delta_h^p f(x)$ obtenue en répétant p fois l'opération D_h , ie :

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta_h^2 f(x) &= \Delta_h (\Delta_h f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \\ \Delta_h^p f(x) &= \Delta_h (\Delta_h^{p-1} f(x)), \quad \forall p \geq 3. \end{aligned}$$

On appelle **opérateur différence (finie) d'ordre p, et de pas h**, l'application $f \mapsto \Delta_h^p f$ de H^G dans H définie par (4). On note aussi $\Delta_h^0 f$ au lieu de f . On montre que :

$$(a) \Delta_h^p f(x) = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_p^j f(x + (p-j)h) ;$$

$$(b) \text{inversement, } f(x + ph) = \sum_{j=0}^p C_p^j \Delta_h^j f(x) ;$$

(c) les opérateurs précédents possèdent des propriétés analogues à celles des opérateurs de différentiation, notamment :

$$(5) D_h^p (f(x) g(x)) = \sum_{j=0}^p C_p^j \{\Delta_h^{p-j} f(x)\} \{\Delta_h^j g(x + (p-j)h)\} ;$$

(d) si $x_{(p)h}$ est le **polynôme factoriel** d'ordre p et d'incrément h en x , on a $\Delta_h x_{(p)h} = p h x_{(p-1)h}$;

(e) lorsque $G = H = \mathbf{R}$, on obtient des formules classiques :

$$(e_1) \Delta_h (\log_a f(x)) = \log_a \{1 + (\Delta_h f(x) / f(x))\}, \quad \forall x : f(x) > 0 ;$$

$$(e_2) \Delta_h^p a^x = (a^h - 1)^p a^x, \quad \forall a \in \mathbf{R}_+^* ;$$

$$(e_3) \Delta_h \sin(ax + b) = 2 \sin\{(ah) / 2\} \cdot \cos\{ax + b + ((ah) / 2)\} ;$$

$$(e_4) \Delta_h \cos(ax + b) = -2 \sin\{(ah) / 2\} \cdot \sin\{ax + b + ((ah) / 2)\}.$$

(ii) Dans le cas particulier important où $G = H = \mathbf{R}$, on appelle simplement différence première (de pas 1) au point $x \in \mathbf{R}$, et l'on note Δ au lieu de Δ_1 , l'application :

$$(6) f(x) \mapsto \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Les itérées Δ^p (avec $p \in \mathbf{N}^*$) de Δ sont aussi appelées **différences finies**.

Si F est l'**opérateur avance** (avec $F f(x) = f(x+1)$) et $\text{id}_{\mathbf{R}}$ l'identité de $\mathbf{R}$, alors (d'après (1) avec $h = 1$) :

$$(7) \Delta f(x) = (F - \text{id}_{\mathbf{R}}) f(x).$$

De même, si B est l'**opérateur retard** (avec $B f(x) = f(x-1)$) et $\text{id}_{\mathbf{R}}$ l'identité de $\mathbf{R}$, alors (d'après (3) avec $h = 1$) :

$$(8) \Delta f(x) = (\text{id}_{\mathbf{R}} - B) f(x).$$

D'après (1), on peut encore définir un opérateur noté eg ∇_h (ou v_h) tq :

$$(9) f(x+h) = \nabla_h f(x) = f(x) + \Delta_h f(x) = (1 + \Delta_h) f(x),$$

d'où l'on déduit :

$$(10) \quad \Delta_h f(x) = (\nabla_h - 1) f(x).$$

On peut donc poser :

$$(11) \quad \nabla_h^p f(x) = f(x + p h) = (1 + \Delta_h)^p f(x),$$

le développement de l'expression $(1 + \Delta_h)^p$ s'effectuant formellement comme pour un polynôme.

A partir des éléments précédents, on peut définir des polynômes (ou aussi des fonctions moins simples) en Δ_h ou en ∇_h (comme pour les opérateurs avance F et retard B).