

OPÉRATEUR NON BORNÉ (A3, A4)

(07 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le concept d'**opérateur linéaire** est couramment employé en **Statistique** : **matrice** ou **opérateur de covariance**, **projecteur**, **modèle linéaire**, etc. Ils constituent autant d'opérations qui sont à la base de méthodes générales : méthodes par projection, **estimateurs à distance minimale** (ou **estimateurs à distance minimum**), **autocovariances**, etc.

(i) Soit E un **espace de HILBERT séparable** et $V \triangleleft E$ un sous-**espace vectoriel** de E .

On appelle **opérateur non** (nécessairement) **borné** dans E toute **application linéaire** $f : V \mapsto E$, ie $f \in \text{Hom}(V, E)$ (cf **homomorphisme**). On note que :

(a) f n'est pas nécessairement continu. On le note souvent à l'aide de majuscules, eg A (ou T , etc) ;

(b) V est appelé **domaine** de f , et on le note $\text{dom } f$;

(c) le graphe $G_f = \{(x, f(x)) : x \in V\}$ de f est un sous-espace vectoriel de E^2 , ie $G_f \triangleleft E^2$;

(d) par convention, $f = g \Rightarrow \text{dom } f = \text{dom } g$.

(ii) On dit que f est un **opérateur fermé** ssi G_f est un sous-espace vectoriel fermé dans E^2 . Par suite, le **noyau** $\text{Ker } f$ de f est fermé dans E .

(iii) On dit que $\lambda \in \mathbf{C}$ est une **valeur régulière** de l'opérateur fermé f ssi l'opérateur $g : V \mapsto E$ défini selon :

$$(1) \quad g = f - \lambda \text{id}_E$$

est à la fois bijectif et tq $g^{-1} : E \mapsto V$ soit continu. L'ensemble des **valeurs singulières** (ie des valeurs non régulières) de f est appelé **spectre** de f dans $\mathbf{C}$ et on le note $\text{Sp}_{\mathbf{C}} f$ (ou $\text{Sp } f$) (cf **spectre d'un opérateur**). L'ensemble $\text{Rég } f$ des valeurs régulières de f vérifie donc :

$$(2) \quad \text{Rég } f = \mathbf{C} \setminus \text{Sp } f.$$

(iv) Le spectre de f dans $\mathbf{C}$ peut être partitionné en trois classes :

(a) la classe des **valeurs propres** de f , appelée **spectre ponctuel** de f et notée $\text{val } f$;

(b) la classe des nombres $\lambda \in \text{Sp } f$ qui ne sont pas des valeurs propres de f , qui sont tq $g(V)$ soit dense dans E (cf **partie dense**) mais que l'application bijective

$g^{-1} : g(V) \mapsto E$ ne soit pas continue (cf **application continue**). On l'appelle **spectre continu** et on la note $\text{cont } f$;

(c) la classe des nombres $\lambda \in \text{Sp } f$ qui ne sont pas des valeurs propres de f mais sont tq $g(V)$ n'est pas dense dans E . On l'appelle **spectre résiduel** et on la note $\text{rés } f$.