OPTIMALITÉ DE TYPE A (G4, H, J)
(07 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle paramétrique**, avec $\Theta \subset \mathbf{R}^Q$. On suppose ce **modèle dominé** par une **mesure positive** μ définie sur $\mathscr{B}$. On note I (θ) $\in S_Q$ (**R**) sa matrice d'**information de FISHER** et $(\lambda_q)_{q=1,\dots,Q}$ la suite des **valeurs propres** de I (θ).

On appelle **critère d'optimalité de type A** (au sens de J.C. KIEFER) la fonction g : S_Q (**R**) $\mapsto \mathbf{R}_+$ définie par la **trace** (de la matrice d'information) :

(1) $\quad g(I(\theta)) = \mathrm{tr}\{I(\theta)^{-1}\} = \Sigma_{q=1}^{Q} (1 / \lambda_q), \quad \forall \theta \in \Theta,$

ce qui suppose que $\min_{q=1}^{Q} \lambda_q > 0$ (ie que I (θ) est strictement **définie positive**).

Le critère précédent est donc proportionnel à l'inverse de la **moyenne harmonique** des valeurs propres de I (θ).

Un estimateur $\theta^{\sim}$ de θ est un **estimateur A-optimal** ssi il réalise un minimum du critère précédent, ie ssi :

(2) $\quad g(I(\theta^{\sim})) = \inf_\theta g(I(\theta)).$

(ii) La notion se transpose directement au cas d'un modèle non paramétrique. Elle s'étend en celle de S-optimalité (cf **optimalité de type S**).

(iii) Soit :

(3) $\quad y_n = f(X_n, b) + u_n, \quad n \in N_N^*,$

un **modèle (non linéaire)** associé à un **plan d'expérience** et exprimé dans l'**espace des observations**. Les **observations** X_n peuvent être représentées à l'aide d'une **lp** commune ν, parfois appelée **plan**, définie sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}^K)$ (ie $P^{X(n)} = \nu$, $\forall$ n = 1 ,..., N, en notant X(n) pour désigner X_n).

Un plan optimal doit réaliser un « écart » minimum entre un estimateur $b^{\sim}$ de b et b* (la **vraie valeur** du paramètre). Si le modèle (3) est linéaire pr à b (avec eg f (X_n , b) = $\phi(X_n)'$ b, où $\phi : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}^K$ est donnée a priori), on note :

(4) $\quad M(\nu) = \int \phi(x)\, \phi(x)'\, \nu(dx)$

la **matrice d'information** (générique), censée mesurer la qualité (ou la précision) du plan ν et supposée définie positive.

Par suite, un plan $\nu^{\#}$ est appelé **plan optimal** ssi il existe une fonction G : $\mathscr{M} \mapsto \mathbf{R}_+$ (définie sur l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices M (ν) précédentes) qui est minimum en $\nu^{\#}$, ie ssi :

(5) $\quad G(M(\nu^{\#})) = \inf_{\nu} G(M(\nu)), \qquad \text{avec} \int \nu(dx) = 1.$

On définit alors ici l'**optimalité de type A** à l'aide du critère de la **trace** suivant :

(6) $\quad G(M(\nu)) = \mathrm{tr}\, M(\nu).$

En particulier, si le modèle associé au plan est un **modèle linéaire** de la forme $y = X b + u$, on définit un **plan A-optimal** comme plan $\nu^{\#}$ dont la matrice associée $X \in M_{NK}(\mathbf{R})$ est choisie en sorte que tr (X' X) soit minimum.