OPTIMALITÉ DE TYPE E (G4, H, J)
(15 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Dans le même cadre que celui définissant l'**optimalité de type A**, on appelle **critère d'optimalité de type E** (de J.C. KIEFER) la fonction g : S_Q (**R**) $\mapsto$ $\mathbf{R}_+$ définie par la plus petite **valeur propre** (« normalisée ») :

(1) $g (I (\theta)) = Q^{-1} . \min_{q=1}^{Q} \lambda_q , \qquad \forall \theta \in \Theta.$

Un estimateur $\theta^{\sim}$ de θ est un **estimateur E-optimal** ssi il réalise un minimum du critère précédent, ie ssi :

(2) $g (I (\theta^{\sim})) = \inf_{\theta} g (I (\theta)).$

(ii) La notion se transpose directement au cas d'un modèle non paramétré. Elle s'étend en celle d'**optimalité de type S**.

(iii) Un **plan d'expérience** $\nu^{\#}$ (défini comme pour l'optimalité de type A) est un **plan E-optimal** ssi le critère d'optimalité G retenu est de la forme :

(3) $G (M (\nu)) = \min_{k=1}^{K} \lambda_k ,$

et ssi :

(4) $G (M (\nu^{\#})) = \inf_{\nu} G (M (\nu)),$

où l'on note $\{\lambda_1 ,..., \lambda_Q\}$ l'ensemble des valeurs propres de M (ν).

En particulier, si le modèle associé au plan est un **modèle linéaire**, écrit selon y = X b + u dans un **espace d'observation**, on définit un plan E-optimal comme plan dont la matrice associée $X \in M_{NK}$ (**R**) est choisie en sorte que la valeur propre la plus petite de X' X soit minimum.

(iv) A titre d'exemple, soit E un plan d'expérience dans lequel on étudie l'**effet** de K **traitements** k = 1 ,..., K sur N **unités expérimentales** n = 1 ,..., N regroupées en B **blocs** b = 1 ,..., B, chaque bloc étant de taille N_b , avec $\Sigma_{b=1}^{B} N_b = N$.

Etant donné un **schéma d'association** $\mathcal{S}$ des traiments aux unités n_{kb} = 1 ,..., N_{kb} de chaque bloc b, on note $M = (N_{kb})_{kb}$ la (K,B)-**matrice d'incidence**, où N_{kb} désigne le nombre d'**unités expérimentales** du bloc b auxquelles on applique le traitement k. On veut alors étudier avec une précision maximum les effets des traitements sur les unités en supposant que le **modèle d'analyse de la variance** associé à E est de la forme (à deux facteurs additifs) :

(5) $y_{kb\, n(k,b)} = \alpha_k + \beta_b + u_{kb\, n(k,b)} , \qquad \forall n_{kb} = 1 ,..., N_{kb} ,$

en notant n(k,b) l'indice n_{kb} . Dans (5), $k \in N_K^*$, $b \in N_B^*$, α_k est l'effet propre au traitement k, β_b l'effet propre au bloc b et les $u_{kb\ n(k,b)}$ sont des va indépendantes et équidistribuées (cf **échantillon iid**, **suite iid**) tq :

$$(6)\qquad \begin{cases} E\ u_{kb\ n(k,b)} = 0, \\ C\,(u_{kb\ n(k,b)}\ ,\ u_{k'b'\ n(k',b')}) = \delta_{(k,b)(k',b')}\ .\ \sigma^2, \end{cases}$$

pour tous indices, où δ_{ij} désigne le **symbole de KRONECKER**.

La **matrice** des **coefficients** α_k relatifs aux traitements, associée aux **équations normales** du modèle (5), s'écrit :

$$(7)\qquad C = L_M - M\,C_M^{-1}\,M',$$

où L_M est la (K,K)-**matrice diagonale** d'éléments $(M\,e_K)_k = \Sigma_{b=1}^{B} N_{kb}$ (totaux en ligne de M), C_M est la (B,B)-matrice diagonale d'éléments $(e_K'\,M)_k = \Sigma_{k=1}^{K} N_{kb}$ (totaux en colonne de M) et C_M^{-1} son inverse.

Par suite, on vérifie que $C\,e_k = 0$.

Si l'on suppose, en outre, que E est un **plan connexe** (ie tous ses **contrastes**, définis pr aux effets des traitements α_k , sont estimables), alors rg C = K - 1. On note $\mathcal{C}_K(\mathcal{B})$ l'ensemble des plans connexes appliquant K traitements à N unités réparties dans l'ensemble $\mathcal{B}$ des B blocs précédents.

On dit alors qu'un plan $E^* \in \mathcal{C}_K(\mathcal{B})$ est un **plan optimal de type E**, ou **plan E-optimal**, ssi, pour tout autre plan $E \in \mathcal{C}_K(\mathcal{B})$, on a :

$$(8)\qquad l_2^* \geq l_2\ ,$$

où l'on désigne par $l_1^* \leq l_2^* \leq ... \leq l_K^*$ les valeurs propres de C* (matrice C associée à E*) et $l_1 \leq l_2 \leq ... \leq l_K$ celles de C. Ceci revient à considérer la plus petite valeur propre non nulle (ie l_2), car :

$$(9)\qquad \text{rg } C = K\text{-}1 \ \Rightarrow\ l_1 = 0.$$