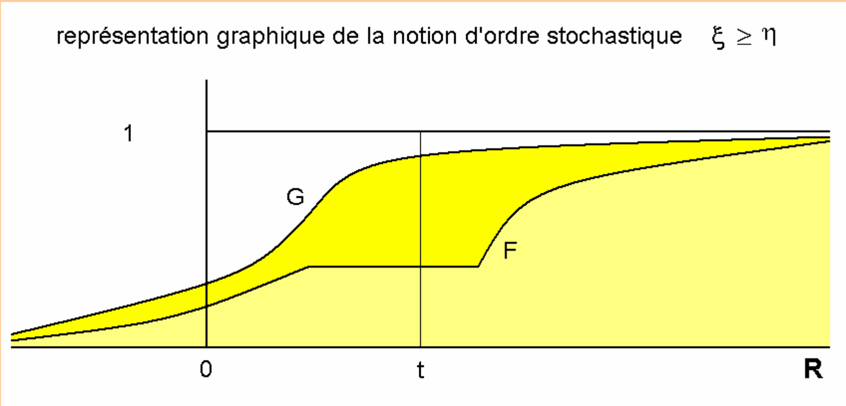
ORDRE STOCHASTIQUE (C1, C4, C6, E)
(24 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (Ω, $\mathcal{T}$, P) un **espace probabilisé** et (ξ, η) : $\Omega \mapsto \mathbf{R}^2$ un **couple aléatoire** réel dont les **fr marginales** sont resp notées F et G.

On dit que :

(a) ξ est **stochastiquement plus grande** que (ou **domine en probabilité**) η ssi (cf schéma ci-dessous) :

(1) F (t) $\leq$ G (t), $\forall$ t $\in$ **R**.



L'interprétation graphique suggère que les masses de probabilité de F sont « déportées » vers la droite pr à celles de G, donc que les valeurs de ξ sont plus grandes que celles de η.

On note alors $\xi \geq \eta$ (ou F $\leq$ G) ;

(b) ξ est **stochastiquement strictement plus grande** que (ou **domine strictement en probabilité**) η ssi il existe une **partie** non négligeable B $\in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ tq (cf **partie négligeable**) :

(2) F $\leq$ G (au sens précédent) et F (t) < G (t), $\forall$ t $\in$ B.

On note F < G ou $\xi > \eta$.

Par suite, sur l'ensemble des va admettant une fr propre (ie une **fr marginale**), la relation (2) définit un **ordre stochastique**, qui n'est généralement pas un ordre total ;

(c) on dit que ξ et η sont **stochastiquement égales** ssi $\xi \geq \eta$ et $\eta \geq \xi$ (**égalité stochastique**). Dans ce cas, F = G et les lois propres (ie marginales) sont identiques, ie $P^{\xi} = P^{\eta}$, λ-p.s..

(iv) On peut alors définir la notion de **suite stochastiquement croissante** (resp **décroissante**). Si X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de **vars**, X est stochastiquement croissante ssi :

(3) $\alpha < \beta \Rightarrow F_\beta \geq F_\alpha$,

en notant F_n la fr propre de X_n , $\forall$ n $\in$ **N**.

(ii) Etant donné deux **échantillons** X et Y indépendants entre eux, tq X est iid selon la fr F et Y est iid selon la fr G (cf **échantillon iid**), on peut tester l'**hypothèse de base** H_0 : F = G contre une **alternative ordonnée** H_a : F $\geq$ G.

A titre d'exemple, si G est de la forme G = F^α, le problème revient à tester H_0' : α = 1 contre H_α' : α < 1, ce qui peut s'effectuer à l'aide des **fr empiriques** F_N (associée à X) et G_N (associée à Y), ou de **statistiques** qui peuvent s'en déduire.