PARAMÈTRE D'ÉCHELLE ET DE POSITION (C2, C5, G2)
(26 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **paramètre d'échelle et de position** est un paramètre « réduit » en appliquant à un paramètre « initial » θ deux **centrages** successifs (cf aussi **niveau, répartition, évolution**) :

(a) un centrage « additif » $\theta - \alpha$: élimination des **écarts** en termes de magnitude, ou « niveau absolu » ;

(b) un centrage « multiplicatif » $(\theta - \alpha) / \beta$: élimination des écarts en termes de « **proportion** », ou « niveau relatif ».

Cette transformation suppose que :

(a) l'altération α prenne ses valeurs dans un ensemble A doté d'une opération d'addition (eg groupe additif) ;

(b) l'altération β prenne ses valeurs dans un ensemble B doté d'une opération de multiplication (eg groupe multiplicatif).

En général A et B sont des anneaux ou des corps (ou leurs puissances cartésiennes).

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique** tq $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ et $\Theta \subset \mathbf{R}^K \times C_K(\mathbf{R})$, où $C_K(\mathbf{R}) = M_K^+(\mathbf{R}) \cap S_K(\mathbf{R})$ est le **cône** des **matrices symétriques** réelles définies positives (cf **matrice définie positive**).

On dit que $\theta = (\alpha, \Sigma) \in \Theta$ est un **paramètre d'échelle et de position**, ou un **paramètre de centrage et de réduction**, ou encore un **paramètre de normalisation**, des **loi** P_θ^ξ ssi, $\forall\ \theta \in \Theta$, la loi P_θ^ξ de ξ ne dépend que de la **variable aléatoire** $\Sigma^{-1/2}(\xi - \alpha)$.

Autrement dit, si h désigne l'**application** $\mathcal{X} \times \Theta \mapsto \mathbf{R}$ définie par :

(1) $\quad (x, \theta) \mapsto (pr_2\, \theta)^{-1/2}(x - pr_1\, \theta) = \Sigma^{-1/2}(x - \alpha)$,

il existe une loi fixe (ie indépendante de θ) $\mathcal{L}(.)$, définie sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^K)$, tq :

(2) $\quad P_\theta^X = \mathcal{L}\{h(\xi)\} = \mathcal{L}\{\Sigma^{-1/2}(\xi - \alpha)\}, \qquad \forall\ \theta \in \Theta.$

Si F_θ désigne la **fr** associée à P_θ^X, (2) équivaut à :

(3) $\quad F_\theta(x) = (G \circ h)(x, \theta) = G(\Sigma^{-1/2}(x - \alpha)), \qquad \forall\ x \in \mathbf{R}^K, \qquad \forall\ \theta \in \Theta,$

où G est la fr (indépendante de θ) associée à $\mathscr{L}(.)$.

(ii) En particulier, lorsque K = 1 et que P_θ^ξ admet une **densité** f (. , θ) pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 , on obtient, $\forall\ \theta \in \Theta$:

(4) $\quad f(x, \theta) = \Sigma^{-1/2} (g \circ h)(x, \theta) = \Sigma^{-1/2} . g(\Sigma^{-1/2} (x - \alpha)), \quad \forall\ x \in \mathbf{R},$

où $g = d\mathscr{L}(.) / d\lambda_1$ (densité de $\mathscr{L}(.)$ pr à λ_1) est indépendante de θ.

(iii) La notation (α, β) est usuelle pour un paramètre d'échelle et de position (cf aussi **centralité**, **dispersion**, **paramètre de position**, **paramètre d'échelle**).