

PARTIE ALÉATOIRE (A3, C1, N)

(09 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

On donne à l'expression partie aléatoire deux significations.

(i) **Première signification.** Etant donné un **espace probabilisé** (Ω, \mathcal{F}, P) , on appelle parfois **partie aléatoire** toute **partie mesurable** $A \in \mathcal{F}$.

Dans ce contexte, on parle plutôt d'**événement aléatoire** ou simplement d'**événement**. Cet événement peut donc être :

(a) un **événement simple** : partie $A = \{a\}$ comportant un seul élément a de Ω ($\text{Card } A = 1$) ;

(b) un **événement complexe** : partie A comportant plusieurs éléments de Ω ($\text{Card } A > 1$).

(ii) **Seconde signification.** Selon cette autre acception (D.G. KENDALL - G. MATHERON), soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace topologique** muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$, où l'on note \mathcal{O} (resp \mathcal{F}) la **famille** des **ouverts** (resp des fermés) de \mathcal{X} .

On appelle **partie aléatoire**, ou **ensemble aléatoire**, toute **application mesurable** $\alpha : \Omega \mapsto \mathcal{B}$ tq :

$$(1) \quad [\alpha \cap B \neq \emptyset] = \{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Une partie aléatoire est ouverte (resp fermée) ssi l'on remplace dans ce qui précède $\alpha : \Omega \mapsto \mathcal{B}$ par $\alpha : \Omega \mapsto \mathcal{O}$ (resp $\alpha : \Omega \mapsto \mathcal{F}$).

La **loi de probabilité** (lp) d'une partie aléatoire est, par définition, l'image :

$$(2) \quad \alpha(P) = P(\alpha^{-1}), \quad \text{notée } P^\alpha \text{ ou } \mathcal{L}(\alpha).$$

(iii) La théorie des parties aléatoires (second sens) se développe ensuite de façon assez parallèle à celle des **variables aléatoires**, une partie aléatoire n'étant en effet autre chose qu'une va particulière à valeurs dans une famille de parties.

La théorie entretient notamment des liens avec le calcul des **probabilités géométriques**.