PARTIE (D'UN ENSEMBLE) (A2)
(06 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit E un **ensemble** quelconque et Pr une « ***propriété*** » susceptible d'être vérifiée par les éléments x de E.

On dit que A est une **partie de E relative à Pr**, ou encore un **sous-ensemble de E relatif à Pr**, ssi :

(0) $A = \{x \in E : x \text{ vérifie } Pr\}$.

Le **principe de dualité** permet de vérifier la cohérence entre une propriété Pr et son contraire.

On note $A \subset E$ (A inclus dans E) le fait que A est une partie de E (**propriété d'inclusion**).

B étant une autre partie de E, on peut définir de même l'inclusion de A dans B.

(ii) On note habituellement $\mathscr{P}(E)$ l'**ensemble des parties** de E. Cet ensemble est (partiellement) ordonné par l'**inclusion** $\subset$ (cf **relation d'ordre**).

Dans tout ensemble E, deux parties peuvent être distinguées :

(a) la **partie pleine**, ie E lui-même : $E \in \mathscr{P}(E)$;

(b) la **partie vide**, notée $\varnothing$: $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Ces parties peuvent se définir de plusieurs façons, eg $E = \{x \in E : x = x\}$ et $\varnothing = \{x \in E : x \neq x\}$.

On peut alors définir deux opérations de base dans cet ensemble :

(a) **intersection ensembliste** : si A et B sont deux parties quelconques de E, on appelle **intersection** de A et B l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B, ie $\{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\} = \mathbf{I}$. On note $\mathbf{I} = A \cap B$;

(b) **réunion ensembliste** : si A et B sont deux parties quelconques de E, on appelle **réunion** de A et B l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à (au moins) l'une de ces deux parties, ie $\{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\} = U$. On note $U = A \cup B$.

(iii) L'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$ sont des lois de composition internes dans $\mathscr{P}(E)$. E est :

(a) un **élément neutre** pour $\cap$**,** ie : $A \cap E = A, \forall A \in \mathscr{P}(E)$;

(b) un **élément absorbant** pour $\cup$, ie $A \cap E = E, \forall A \in \mathscr{P}(E)$.

Muni des opérations $(A, B) \mapsto A \cup B$, $(A, B) \mapsto A \cap B$ et $A \mapsto A^c$ (complémentation), $\mathscr{P}(E)$ est alors muni d'une **structure** d'**algèbre de BOOLE**.

(iv) De même que l'on définit $\mathscr{P}(E)$ à partir de E, on peut définir $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ à partir de $\mathscr{P}(E)$: tout(e) ensemble (resp famille) de parties de E est élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$. Ainsi, si $\mathscr{A}$ est une **tribu de parties** de E, $\mathscr{A}$ est un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

(v) Si $\mathscr{A}$ est une **famille** quelconque de parties de E, on définit, de façon générale :

(a) la **réunion** des éléments de $\mathscr{A}$ selon :

(1) $U = \cup_{A \in \mathscr{A}} A = \{x \in E : \exists A \in \mathscr{A} \text{ tq } x \in A\}$;

(b) l'**intersection** des éléments de $\mathscr{A}$ selon :

(2) $I = \cap_{A \in \mathscr{A}} A = \{x \in E : \forall A \in \mathscr{A}, x \in A\}$.

Lorsque $\mathscr{A}$ est écrite sous la forme $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble d'**indices** ad hoc, on écrit aussi :

(3)
$$U = \cup_{i \in I} A_i ,$$
$$I = \cap_{i \in I} A_i .$$