**PARTIE FLOUE (A3)**
(24 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **partie floue** est un concept de base de la **théorie des parties floues**.

(i) Soit A $\in \mathscr{P}$(E) une **partie d'un ensemble** E.

La connaissance de la **fonction indicatrice** $\mathbf{1}_A : E \mapsto \{0, 1\} = N_1$ du sous-ensemble A équivaut à celle de A car, par définition :

$$(1) \qquad \mathbf{1}_A (x) = \begin{cases} 1 \text{ ssi } x \in A, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On peut étendre cette définition en remplaçant $N_1 \subset \mathbf{N}$ par un ensemble tq $\{c, d\} \subset F$, où $d \neq c$ et où F est un ensemble quelconque tq Card F $\geq 2$, ie :

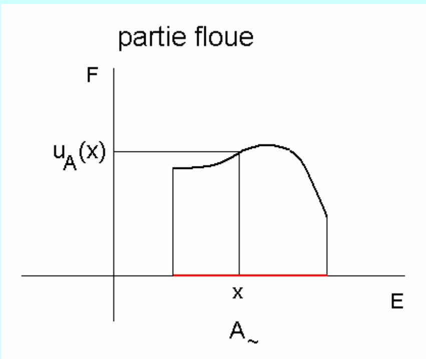
$$(2) \qquad \mathbf{1}_A (x) = \begin{cases} c \text{ ssi } x \in A, \\ d \text{ sinon.} \end{cases}$$

(ii) Soit E et F deux ensembles, A $\in \mathscr{P}$(E) et $u_A : E \mapsto F$ une **application** donnée.

On appelle **partie floue**, ou **sous-ensemble flou**, de E toute **famille**, notée $(x, u_A (x))_{x \in E}$ , constituée, à la fois (cf graphe ci-dessous) :

(a) des éléments $x \in E$ ;

(b) des images $u_A (x)$ par $u_A$ .




L'application $u_A$ est appelée **(fonction) indicatrice d'appartenance**, ou **(fonction) degré d'appartenance**.

L'image $u_A (x)$ d'un élément $x \in E$ est appelée **degré d'appartenance**, ou **niveau d'appartenance** (de x à A). Une partie floue A de E peut se noter $A_\sim$ , ou $A^\sim$ , ou $A_\#$ , ou $A^\#$ , etc : la notation $(x, u_A (x))_{x \in E}$ équivaut à la notation simplifiée $A_\sim$ .

Une **partie floue** de E est donc caractérisée par une application, notée eg $u_A : E \mapsto F$. La **relation d'appartenance floue** définie précédemment est ainsi notée $\in_\sim$ , ie : $x \in_\sim A_\sim$ (dans le premier système de notation).

En pratique, F est souvent un ensemble ordonné (cf **relation d'ordre**) ou un **treillis** : en particulier, $F = [0, 1] \subset \mathbf{R}$.

Si x n'appartient pas à A de façon floue, on parle de **non appartenance floue**. La non appartenance floue est notée $\notin_\sim$ , ie : $x \notin_\sim A_\sim$ .

Une partie floue est ainsi entièrement caractérisée par $u_A$ de la même façon qu'une partie ordinaire (ie au sens de l'inclusion usuelle) est entièrement caractérisée par sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ . Lorsque $F = N_1$ , les deux notions coïncident.

(iii) On peut alors définir une **algèbre ensembliste floue** comme suit :

(a) l'**inclusion floue** (**au sens large**) $\subseteq_\sim$ entre deux parties floues A et B est définie selon :

(3) $A \subseteq_\sim B \Leftrightarrow u_A \leq u_B$ ,

ce qui suppose F totalement ordonné par une relation $\leq$.

L'**inclusion floue** (**au sens strict**) $\subset_\sim$ est définie selon :

(4) $A_\sim \subset_\sim B_\sim \Leftrightarrow \{A_\sim \subseteq_\sim B_\sim \text{ et } \exists\, x_0 \in E \text{ tq } u_A(x_0) < u_B(x_0)\}$ ;

(b) l'**égalité entre parties floues** $A_\sim$ et $B_\sim$ est définie selon :

(5) $A_\sim =_\sim B_\sim \Leftrightarrow u_A = u_B$ .

Par suite, l'**inégalité** (ou non identité) **entre parties floues** est définie par :

(6) $A_\sim \neq_\sim B_\sim \Leftrightarrow \exists\, x_0 \in E \text{ tq } u_A(x_0) \neq u_B(x_0)$ ;

(c) si $F = R_1 = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, le **complémentaire flou** $B_\sim$ de $A_\sim$ est défini selon :

(7) $B_\sim = (A_\sim)^c \Leftrightarrow u_B = \mathbf{1}_E - u_A$ ,

où $\mathbf{1}_E$ désigne la **fonction indicatrice** ordinaire de E (on note aussi $u_B = 1 - u_A$) ;

(d) si $F = R_1 = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, l'**intersection floue** $I_\sim$ de deux parties floues $A_\sim$ et $B_\sim$ est définie selon :

(8) $I_\sim = A_\sim \cap_\sim B_\sim \Leftrightarrow u_I = \inf(u_A , u_B)$.

C'est donc la plus grande partie floue contenue (au sens flou) dans $A_\sim$ et $B_\sim$ .

De même, la **réunion floue** de $A_\sim$ et $B_\sim$ est définie selon :

(9) $U_{\sim} = A_{\sim} \cup_{\sim} B_{\sim} \Leftrightarrow = u_U = \sup(u_A, u_B)$. ;

(e) d'autres opérations ensemblistes (floues) peuvent encore être définies. Ainsi, la **différence symétrique floue** est tq :

(10) $D_{\sim} = A_{\sim} \Delta_{\sim} B_{\sim} \Leftrightarrow D_{\sim} = (A_{\sim} \cap_{\sim} B_{\sim}^{c}) \cup_{\sim} (A_{\sim}^{c} \cap_{\sim} B_{\sim})$.

(iv) La notion de partie floue permet de formaliser simplement l'idée d'appartenance plus ou moins forte d'un élément à une partie d'un ensemble E donné. Ainsi, lorsque $F = R_1$ , $u_A(x) = 0$ signifie que $x \notin A_{\sim}$ et $u_A(x) = 1$ signifie que $x \in A_{\sim}$ .

Plus généralement, $u_A(x) = p \in R_1$ signifie que $x \in_p A_{\sim}$ avec un degré d'appartenance égal à p.

L'application $u_A : x \in E \mapsto u_A(x) \in R_1$ n'est pas, en général, une **mesure de probabilité**.

On peut cependant probabiliser une famille $\mathcal{T}_{\sim}$ constituée de parties floues $A_{\sim}$ d'un ensemble fondamental quelconque $\Omega$. Ceci revient à probabiliser la famille des fonctions d'appartenance $u_A$ (où $A_{\sim} \in \mathcal{T}_{\sim}$) qui lui est associée. En effet, en notant $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ de $A \in \mathcal{T}$ est une **variable aléatoire** et l'on a, par définition :

(11) $E_P 1_A = \int \mathbf{1}_A \, dP = \int_A dP = P(A)$.

Si $A_{\sim}$ est une partie floue appartenant à une famille $\mathcal{T}_{\sim}$ , on peut poser, de façon analogue :

(12) $E_P u_A = \int u_A \, dP$,

ce qui définit la probabilité $P(A_{\sim})$.

Lorsque $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, l'expression vague « **a est petit devant b** », ou **a est petit pr à b** » (resp « **a est grand devant b** » ou « **a est grand pr à b** »), souvent notée $a << b$ (resp $b << a$), peut se représenter à l'aide de parties floues de la droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$, la valeurs de la fonction d'appartenance étant donnée a priori.

(v) En **Statistique**, on observe, ou utilise, souvent des « données » floues. Ainsi, un **modèle de régression linéaire** multiple usuel, de la forme $y = X b + u$, peut comporter des observations (X, y) floues, ie dont on ne connaît pas précisément les valeurs (comparer avec **modèle à erreurs sur les variables**).