PARTIE POSITIVE, PARTIE NÉGATIVE (A3, A4, C1)
(24 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle :

(a) **partie positive** de x le nombre réel positif :

(1) $x^+ = \max(x, 0) \in \mathbf{R}_+$

(b) **partie négative** de x le nombre réel positif :

(2) $x^- = \max(-x, 0) \in \mathbf{R}_+$.

(ii) On montre que :

(a) $x = x^+ - x^-$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

(b) $|x| = x^+ + x^-$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

(c) $x^- = (-x)^+$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

(d) $|x| + x = 2x^+$, $|x| - x = 2x^-$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

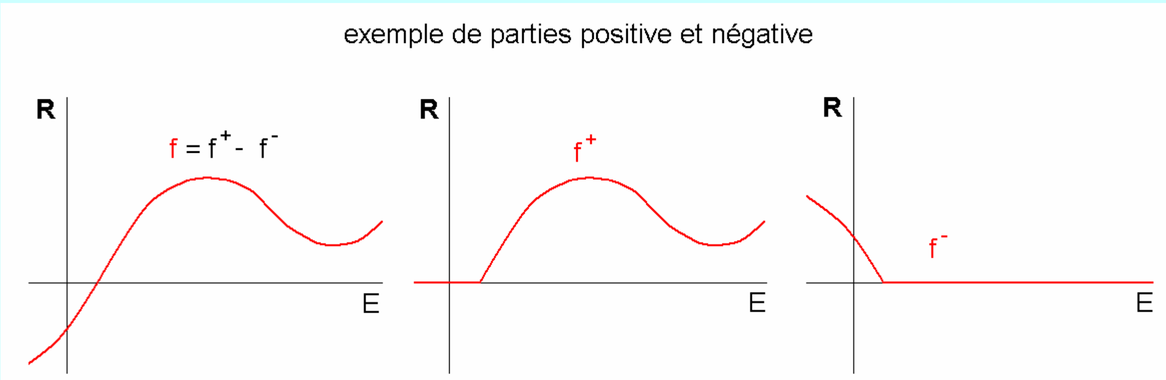
(iii) Plus généralement, soit $f : E \mapsto \mathbf{R}$ une **fonction numérique**.

On appelle **partie positive** de f la fonction $f^+ : E \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par (cf schéma ci-dessous) :

(3) $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad \forall x \in E$,

et **partie négative** de f la fonction $f^- : E \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par :

(4) $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \qquad \forall x \in E$.



On note simplement $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$, où 0 désigne la **fonction nulle**.

(iv) Les notions précédentes s'étendent directement aux éléments d'un **groupe** de RIESZ (cf **espace de RIESZ**), ainsi qu'aux **mesures**.

(v) En **calcul des probabilités** et en **Statistique**, soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un **espace probabilisable** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars**.

On appelle **partie positive** (resp **partie négative**) de ξ la va ξ^+ (resp ξ^-) tq :

(5) $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ (resp $\xi^- = \max(-\xi, 0)$).

Autrement dit, $\xi^+(\omega) = x^+ = \max\{\xi(\omega), 0\} = \max(x, 0)$, $\forall\, \omega \in \Omega$, et $\xi^-(\omega) = x^- = \max\{-\xi(\omega), 0\} = \max(-x, 0)$, $\forall\, \omega \in \Omega$.

Comme précédemment, on a : $\xi^+ \geq 0$, $\xi^- \geq 0$, $\xi = \xi^+ - \xi^-$ et $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$.

Si F est la **fonction de répartition** associée à la **lp** P^ξ de ξ, celle de la va eg ξ^+ est la fr F^+ définie selon :

(6) $F^+(y) = \mathbf{1}_{\{0\}}(y) . F(y) + \mathbf{1}_{\mathbf{R}^*+}(y) . F(y), \quad \forall\, y \in \mathbf{R}_+$,

où $\mathbf{R}^*+$ désigne $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{1}_B$ représente l'**indicatrice** d'une partie $B \subset \mathbf{R}$.

En particulier, si $P^\xi = \mathcal{N}(0, 1)$ (**loi normale réduite**), alors ξ^+ est une **variable mixte** :

(7) $F^+(y) = 2^{-1} . \mathbf{1}_{\{0\}}(y) + \mathbf{1}_{\mathbf{R}^*+}(y) . \Phi(y), \quad \forall\, y \in \mathbf{R}_+$,

où Φ est la **fr** de $\mathcal{N}(0, 1)$.

(vi) On remplace souvent, dans les définitions, l'opération « max » par l'opération « sup ».