PARTITION (A3, A5, B2, I7, K9, L, M)
(08 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **partition** correspond à la répartition des éléments d'un ensemble dans des parties non vides et disjointes de ce dernier, lesquelles recouvrent l'ensemble donné.

(i) Soit E un **ensemble** et $\Pi_E = (A_i)_{i \in I}$ une **famille** non vide de **parties** A_i de E.

On dit que Π_E est une **partition** de E ssi :

(a) $A_i \neq \varnothing$, $\forall$ i $\in$ I ;

(b) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall$ (i , j) $\in I^2_{\neq}$, où l'on note $I^2_{\neq} = \{(i , j) \in I^2 \text{ tq } j \neq i\}$;

(c) $\cup_{i \in I} A_i = E$.

Une partition est donc un **recouvrement** de E à l'aide de parties non vides et disjointes de E.

On admet parfois que certaines parties A_i soient vides (cf propriété (a) précédente).

De même, on remplace parfois l'égalité (c) par la **condition de recouvrement** :

(d) $\cup_{i \in I} A_i \supset E$.

(ii) Lorsque E est fini, avec Card E = m, le nombre P_k^m de partitions de E en k classes vérifie l'**équation de récurrence** :

(1) $P_k^m = k . P_k^{m-1} + P_{k-1}^{m-1}$, $\forall$ (m, k) $\in$ **N*** x **N***.

De plus, si l'on note S_k^m le nombre des **applications surjectives** de E (Card E = m) sur un ensemble F (Card F = k), on a :

(2) $S_k^m = k ! . P_k^m$, $\forall$ (m, k) $\in \mathbf{N}^2$.

(iii) La notion de partition se formalise encore comme suit.

Soit $\Pi \subset \mathscr{P}$ (E) un ensemble de parties de E. Π est une **partition** de E ssi :

(a) $A \neq \varnothing$, $\forall A \in \Pi$;

(b) $A \cap B = \varnothing$, $\forall$ (A , B) $\in \Pi^2_{\neq}$, où l'on note $\Pi^2_{\neq} = \{(A, B) \in \mathscr{P}^2 \text{ tq } B \neq A\}$;;

(c) $\cup_{A \in \Pi} A = E$.

(iv) Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un **espace probabilisable**.

On appelle **partition probabilisable** de Ω toute famille non vide $(A_i)_{i \in I}$ de parties de $\mathscr{T}$ tq :

(a) $A_i \in \mathscr{T} \setminus \{\varnothing\}, \quad \forall\, i \in I$;

(b) $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall\, (i, j) \in I^2_{\neq}$;

(c) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

C'est donc une partition constituée de parties probabilisables.

(v) Les notions précédentes se transposent directement au cas d'un **espace mesurable** $(E, \mathscr{A})$ (**partition mesurable**).