

PERTE QUADRATIQUE (G3)

(27 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **fonction de perte quadratique** possède des avantages du point de vue des calculs analytiques : sa dérivée est linéaire pr à son argument. Etant convexe, elle est aussi plus « réaliste » qu'une fonction qui serait eg linéaire.

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle image**, $(\Gamma, \mathcal{B}_\Gamma)$ un **espace mesurable** auxiliaire et $g : \Theta \mapsto \Gamma$ une **paramétrisation** qui, par définition, associe à $\theta \in \Theta$ un nouveau « **paramètre** » $\tau = g(\theta) \in \Gamma$, ie qui « transforme » $\theta \in \Theta$ en un nouveau paramètre $\tau = g(\theta) \in \Gamma$ (en général, un **paramètre d'intérêt**).

Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ un espace mesurable tq $\mathcal{Y} \subset \Gamma$ (eg $\mathcal{Y} = \Gamma$) et $T = t(X)$ un **estimateur** de τ défini par la fonction $(\mathcal{B}, \mathcal{G})$ -mesurable $t : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$.

(a) si $\mathcal{Y} \subset \Gamma \subset \mathbf{R}$ (au sens large), on appelle **(fonction de) perte quadratique (scalaire)** la **fonction de perte** suivante :

$$(1) \quad (\delta, \theta) \mapsto L(\delta, \theta) = \alpha \cdot (\delta(X) - g(\theta))^2,$$

dans laquelle $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ et δ est une **règle de décision** (cf **estimateur**).

La première application partielle $d \mapsto L(d, \theta)$ de L est une fonction quadratique, donc une **fonction convexe**, $\forall \theta \in \Theta$. La **fonction de risque** associée à L et correspondant à une décision $T = t(X) = \delta(X)$ est alors définie par :

$$(2) \quad R(t, \theta) \text{ ou } R(\delta, \theta) = \alpha \cdot E_\theta(T - g(\theta))^2 = \alpha \cdot E_\theta(t(X) - \tau)^2.$$

En général, elle n'a de sens que lorsque $t \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^2}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X)$, $\forall \theta \in \Theta$;

(b) si $\mathcal{Y} \subset \Gamma \subset \mathbf{R}^Q$ (paramètre vectoriel), on appelle **(fonction de) perte quadratique (vectorielle)** la **dispersion** de l'estimateur $T = t(X)$ pr à $\tau = g(\theta)$, ie (cf **matrice de dispersion**) :

$$(3) \quad L(t, \theta) = E_\theta(t(X) - g(\theta)(t(X) - g(\theta))' = D_\theta(T, g(\theta)).$$

(ii) Dans le cas vectoriel, on dit que t' est **préférable** à t'' ssi :

$$(4) \quad h' D_\theta(T', g(\theta)) h \leq h' D_\theta(T'', g(\theta)) h, \quad \forall h \in \mathbf{R}^Q \setminus \{0\}, \forall \theta \in \Theta,$$

ie ssi :

$$(5) \quad D_\theta(T', g(\theta)) \leq D_\theta(T'', g(\theta)), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

(au sens (4) des **formes quadratiques** associées à ces matrices de dispersion).

Dans ce même contexte, on définit aussi parfois la **(fonction de) perte quadratique (scalaire)** comme l'**écart quadratique moyen** « généralisé » :

$$(6) \quad L(t, \theta) = E_{\theta} \|t(X) - g(\theta)\|^2.$$

(iii) Sous certaines conditions, une fonction de perte quadratique peut constituer une **approximation** satisfaisante d'une fonction de perte plus générale. Une telle approximation n'est, le plus souvent, que locale : ie eg au **voisinage** de $g(\theta^*)$, où θ^* est la **vraie valeur** du paramètre.