

PERTURBATION D'UNE MATRICE (A3, A10, A12)

(07 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **perturbation d'une matrice** consiste en une **modification** (généralement temporaire) de sa structure à l'aide d'autres matrices. Une telle **altération** (ou **perturbation**) a pour objectif l'étude de ses propriétés mathématiques : stabilité ou résistance, inversion matricielle (cf aussi **décomposition spectrale d'une matrice**, **dérivée matricielle**, **équation matricielle**, **matrice inverse généralisée**, **matrice inverse conditionnelle**).

(i) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée réelle et $\varepsilon > 0$.

On appelle **perturbation** de A l'application $M_n(\mathbf{R}) \mapsto M_n(\mathbf{R})$ tq :

$$(1) \quad A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto A(\varepsilon) = A + \varepsilon^1 C_1 + (1/2!) \varepsilon^2 C_2 + \dots + (1/p!) \varepsilon^p C_p + O(\varepsilon^{p+1}),$$

où $C_j \in M_n(\mathbf{R})$, $\forall j \in \mathbf{N}_p^*$, et où $O(\varepsilon^{p+1})$ est une matrice qui tend vers la (n,n) -matrice nulle O_n lorsque $\varepsilon \rightarrow 0+$.

(ii) Si λ est une **valeur propre** simple de A et u le **vecteur propre** unitaire associé à λ , on peut écrire les perturbations correspondantes sous la forme :

$$(2) \quad \begin{aligned} \lambda(\varepsilon) &= \lambda + \varepsilon v_1 + \dots + (1/p!) \varepsilon^p v_p + O(\varepsilon^{p+1}), \\ u(\varepsilon) &= u + \varepsilon w_1 + \dots + (1/p!) \varepsilon^p w_p + O(\varepsilon^{p+1}). \end{aligned}$$