

PHI-MOYENNE, φ -MOYENNE (C5, F3)

(31 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **moyenne** (arithmétique) d'une **va** (**espérance**) ou d'un **échantillon** (**moyenne empirique**) se généralise en celle de phi-moyenne.

(i) Soit ξ une **vars** de loi P^ξ et $\varphi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ une fonction mesurable (cf **application mesurable**), monotone (ie soit croissante, soit décroissante), et tq la va $\varphi \circ \xi$ soit intégrable :

$$(1) \quad E \varphi (\xi) = \int \varphi (\xi (\omega)) dP (\omega) = \int \varphi (x) dP^\xi (x) < \infty.$$

On appelle **phi-moyenne**, ou **φ -moyenne**, (**théorique**) de ξ (ou de sa **loi**) le nombre réel μ_φ défini selon :

$$(2) \quad \varphi (\mu_\varphi) = E \varphi (\xi).$$

La φ -moyenne est aussi notée $E_\varphi \xi$.

En particulier, si $\varphi = \text{id}_{\mathbf{R}}$ (**identité** de $\mathbf{R}$), alors $\mu_\varphi = E \xi$ (espérance mathématique de ξ).

(ii) Un cas particulier important est la **moyenne potentielle**, ou **p-moyenne**. En effet, si $p \in \mathbf{R}_+^*$ et si $\varphi (x) = x^p, \forall x \in \mathbf{R}_+$, la moyenne potentielle d'ordre p ainsi définie par (2) est notée μ_p . En particulier :

(a) si $p = -1$, on obtient la **moyenne harmonique** de ξ :

$$(3) \quad \mu_{-1} = (E |\xi|^{-1})^{-1} = H \xi ;$$

(b) si $p = 0$, on obtient la **moyenne géométrique** de ξ :

$$(4) \quad \mu_0 = \lim_{p \rightarrow 0+} \mu_p = \exp (E \text{Log} |\xi|) = G \xi ;$$

(c) si $p = 1$, on obtient l'**espérance mathématique** de ξ :

$$(5) \quad \mu_1 = E \xi = \mu_1' \text{ (moment algébrique simple d'ordre 1) ;}$$

(d) si $p = 2$, on obtient la racine carrée de la **moyenne quadratique** de ξ (cf **moyenne dans L^p** , avec $p = 2$) :

$$(6) \quad \mu_2 = (E \xi^2)^{1/2}.$$

(iii) De même, si $a > 0$ et $\varphi (x) = a^x, \forall x \in \mathbf{R}$, on appelle **moyenne exponentielle** (en base a) de ξ le nombre μ_φ tq :

$$(7) \quad a^{\mu_\varphi} = E a^\xi, \text{ ou } \mu_\varphi = \log_a (E a^\xi).$$

(iv) Une propriété importante des moyennes potentielles $\mu_p = (E \xi^p)^{1/p}$ ($\forall p \in \mathbf{R}_+^*$) s'exprime dans l'inégalité suivante :

$$(8) \quad \alpha < \beta \Rightarrow \mu_\alpha < \mu_\beta$$

(ie la fonction $p \mapsto \mu_p$ est croissante).

Dans ce qui précède, on peut remplacer ξ par une **variable centrée** tq $\xi - \varepsilon$ (ou par une variable centrée pr à un **paramètre de position** $C \xi = \alpha$ de ξ) (cf **centralité**).

(iv) Etant donné un N-**échantillon iid** $X = (X_1, \dots, X_N)$ issu de la **variable parente** ξ , on définit parallèlement une notion « empirique » analogue à chacune des précédentes, en remplaçant dans les formules la loi théorique P^ξ par la **loi empirique** P_N . Ceci fournit un **estimateur** « naturel » de cette notion théorique (cf **statistique naturelle**).

Ainsi, la **phi-moyenne**, ou **φ-moyenne**, (resp moyenne potentielle, resp moyenne exponentielle) **empirique** est définie selon :

$$(9) \quad \varphi(M_\varphi) = N^{-1} \sum_{n=1}^N \varphi(X_n) = \int \varphi(x) dP_N(x),$$

où P_N désigne la loi empirique associée à X . La va M_φ ainsi définie constitue souvent un estimateur naturel, généralement biaisé (cf **inégalité de JENSEN**), de la φ -moyenne théorique μ_φ .

(v) Une moyenne harmonique peut être définie, de façon analogue à ce qui précède, pour une **variable qualitative** valuée.