PLAN EN BLOCS INCOMPLETS (L2, L3)
(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On considère un **plan d'expérience** à deux facteurs : un **facteur expérimental** étudié F et un facteur **« blocage »** (ou « **blocs »**).

On suppose que :

(a) le nombre I des niveaux (ou **traitements**) i de F est supérieur au nombre N_b d'**unités expérimentales** figurant dans chaque bloc b $\in N_B^*$, avec $\Sigma_{b=1}^{B} N_b$ = N (nombre total des unités) ;

(b) $N_b = N_0$ (donné), $\forall$ b $\in N_B^*$, et $N_0 < I$;

(c) chaque traitement i est affecté à R unités (ou « **répétitions** » de i), avec R < B ;

(d) aucun traitement n'apparaît deux fois dans le même bloc b.

On a donc :

(1) $N = B . N_0 = I . R.$

Un tel plan est appelé **plan en blocs incomplets**.

(ii) Si $M_{ib} \in \{0, 1\}$ désigne le nombre de fois où le traitement i est répété dans le bloc b, on définit la (I,B)-**matrice d'incidence** $M = (M_{ib})_{(i,b)}$ du plan.

Celle-ci vérifie :

(2)
$$M\, e_B = \Sigma_{b=1}^{B} M_{ib} = I, \qquad \forall\, i \in N_I^*,$$
$$e_I'\, M = \Sigma_{i=1}^{I} M_{ib} = I, \qquad \forall\, n \in N_B^*,$$

avec $\Sigma_{i=1}^{I} \Sigma_{b=1}^{B} M_{ib} = N$.

(iii) Le **plan en blocs incomplets** (pbi) (F. YATES) ainsi défini est notamment mis en oeuvre lorsqu'il n'est pas possible de regrouper suffisamment d'unités en blocs en sorte que $N_b \geq I$, ou lorsque le nombre I des traitements est trop important pour autoriser un regroupement des unités en B blocs suffisamment homogènes (cf **homogénéité**).

(iv) On peut associer à ce plan un **modèle d'analyse de la variance** additif tq :

(3) $y_{ib} = M_{ib} . (\beta^0 + \beta_i^1 + \beta_b^2 + u_{ib})$, $\forall$ (i, b) $\in N_I^* \times N_B^*$,

dans lequel y_{ib} représente l'observation de la **variable numérique** η étudiée dans l'expérience et résulte de l'application du **traitement** i au **bloc** b.

Généralement, l'**identification** du **paramètre** $\beta = (\beta^0, (\beta_i^1)_{i=1,I}, (\beta_b^2)_{b=1,B})$ requiert deux **contraintes**, eg $\Sigma_{i=1}^I \beta_i^1 = 0$ et $\Sigma_{b=1}^B \beta_b^2 = 0$.

L'estimation s'effectue par la **méthode des moindres carrés ordinaires** ou par la **méthode du maximum de vraisemblance** gaussienne, avec contraintes sur les paramètres (cf **maximum de vraisemblance contraint**).

L'**hypothèse statistique** $H_0 : \beta_i^1 = 0$ ($\forall$ i $\in N_I^*$) est testée avec, pour **statistique de test**, la **statistique de FISHER - SNEDECOR** (cf **loi de FISHER-SNEDECOR**).

On dit parfois qu'il y a **confusion** entre les **effets** des traitements et ceux des blocs, car les **équations normales** obtenues ne séparent pas ces deux types d'effets.

Dans un tel plan, le nombre d'occurrences simultanées des traitements i' et i'' dans un bloc b est :

$$(4) \qquad \Sigma_{b=1}^B M_{i'b} M_{i''b} = \begin{cases} P_{i'i''} & \text{si } i'' \neq i', \\ b_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que la **matrice** $P = M M' \in M_I(\mathbf{N})$ vérifie rg P = rg M.

(v) On dit que le plan précédent est un **plan en blocs incomplets équilibré** (pbie) (R.C. BOSE - F. YATES) ssi l'ensemble N_I^* des traitements i est partitionné en B parties (les « blocs ») en sorte que (cf **partition**) :

(a) chaque bloc b contient (le même nombre) N_0 (d')unités ;

(b) chaque traitement i apparaît (ie est appliqué) R fois, ie $P_{ii} = R$, $\forall$ i $\in N_I^*$;

(c) tout couple (i', i'') de traitements distincts apparaît dans exactement P_{00} blocs, ie $P_{i'i''} = P_{00}$ (constante), $\forall$ (i', i'') tq $i'' \neq i'$;

Des conditions (nécessaires) d'**équilibrage** sont alors les suivantes :

$$(5) \qquad \begin{aligned} & R \,.\, I \,.\, (N_0 - 1) = P_{00} \,.\, I \,.\, (I - 1) \quad (\text{resp} = B \,.\, N_0 \,.\, (N_0 - 1)), \\ & I \leq B \quad (\text{resp } R \geq N_0). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$(6) \qquad P = P_{00}\, e_I\, e_I' + (R - P_{00})\, I_I \,.$$

(vi) Un **plan (en carré) latticiel (équilibré)** est un exemple de pbie : ce plan comporte $I = N_0^2$ traitements. Il est constitué de R **répétitions** complètes comportant chacune N_0 blocs et N_0 traitements par bloc :

$$B = R \,.\, N_0 \,,$$
(7)
$$P_{00} = (I - 1)^{-1} \,.\, R \,.\, (N_0 - 1) = (N_0 + 1)^{-1} \,.\, R.$$