POLYNÔME DE LAGRANGE (A10)
(09 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **polynôme de LAGRANGE** est un polynôme d'**interpolation** (numérique) associé à une **suite** $(x_i\ ,\ y_i)_{i=1,...,m}$ constituée de n couples de nombres réels tq les x_j sont différents deux à deux (eg suite strictement croissante).

(i) On définit les **rapports** :

(1) $R_j\ (x) = A_j\ (x) / B_j\ (x_j)$,

avec :

(2)
$$A_j\ (x) = \{(x - x_1) \ldots (x - x_{j-1})\ (x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)\} = \Pi_{\alpha \neq j}\ (x - x_\alpha),$$
$$B_j\ (x_j) = \{(x_j - x_1)\ldots (x_j - x_{j-1})\ (x_j - x_{j+1}) \ldots (x_j - x_n)\} = \Pi_{\alpha \neq j}\ (x_j - x_\alpha).$$

La fonction $R_j : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ainsi définie vérifie, par construction :

(2)
$$R_j\ (x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_j\ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \forall\ j = 1\ ,\ldots,\ m.$$

On appelle alors **polynôme de J.L. de LAGRANGE**, associé à la suite initiale, le polynôme L_m de degré $k \leq m - 1$ défini selon :

(3) $L_m\ (x) = \Sigma_{i=1}{}^m\ R_i\ (x)\ .\ y_i$.

(iii) Ce polynôme vérifie la **propriété d'interpolation** recherchée, ie :

(4)
$$L_m\ (x) = \begin{cases} y_j & \text{si } x = x_j\ ,\ \ \forall\ j \in N_m{}^*, \\ \Sigma_{i=1}{}^m\ R_i\ (x)\ .\ y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite, si une **fonction numérique** $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ passe par les points $(x_i\ ,\ y_i)_{i=1,...,m}$, ie si $f\ (x_i) = y_i\ ,\ \forall\ i = 1\ ,\ldots,\ m$, on peut toujours l'interpoler à l'aide de L_m entre les points successifs $(x_i\ ,\ y_i)$ et $(x_{i+1}\ ,\ y_{i+1})$, $\forall\ i \in N_{m-1}$.