POLYNÔME ZONAL (A3, C1, C2, C4, C6)

La notion de **polynôme zonal** se relie à l'étude de certaines **lois multidimensionnelles**, eg la loi d'une **matrice** lorsque celle-ci est considérée comme une **variable aléatoire** (cf **loi de WISHART**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $X : \Omega \mapsto M_K(\mathbf{R})$ une **matrice** aléatoire dont le **spectre** est $Sp\ X = \{l_1, ..., l_K\}$ (cf **décomposition spectrale d'une matrice**). Par ailleurs, soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{N}^*$ deux entiers.

On appelle **décomposition entière de type k** de m toute suite $N = (N_1, ..., N_k)$ tq :

(a) $N \in (\mathbf{N}^*)^k$ (suite d'entiers strictement positifs) ;

(b) $e_k' N = \Sigma_{\alpha=1}^k N_\alpha = m, \forall N$ (somme constante) ;

(c) $\alpha < \beta \Rightarrow N_\alpha \geq N_\beta$ (suite décroissante au sens large). Autrement dit, $N \in (\mathbf{N}^*)^k_{\geq}$.

Pour tout entier $K > 1$, on note $\mathcal{N}_K$ l'ensemble des décompositions entières de type k, $k \leq K$.

(ii) Etant donné $N \in \mathcal{N}_K$, on appelle (A.T. JAMES) **polynôme zonal** de X toute fonction polynômiale $P_{NK}(X)$ homogène et symétrique en $(l_1, ..., l_K)$ (cf **homogénéité**, **symétrie**).

(iii) Un polynôme de ce type ne s'exprime pas de façon explicite (pr à X).

Par contre, il en existe des propriétés implicites, eg (cf **trace**) :

(1) $(\mathrm{tr}\ X)^m = \Sigma_{N \in \mathcal{N}K} P_{NK}(X)$,

où $\mathcal{N}K$ désigne (par commodité) $\mathcal{N}_K$.