POLYNÔMES DE BERNOULLI (A10)
(24 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) La fonction f : $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbf{R}$ définie par :

(1) $(t, x) \mapsto f(t, x) = (e^t - 1)^{-1} . (e^{t x} - e^t)$,

admet un développement en série entière (pr à t) de la forme :

(2) $f(t, x) = P_0(x) + t . P_1(x) + (t^2 / 2!) . P_2(x) + ... + (t^n / n!) . P_n(x) + ...$

appelé **développement de D. BERNOULLI** de f.

Le n-ième terme comporte un polynôme (ou une fonction polynomiale) P_n qui peut être défini(e) par :

(3) $P_n(x+1) - P_n(x) = x^n, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

En particulier, si $x \in \mathbf{N}$, on a $P_n(x) = 1^n + 2^n + ... + (x - 1)^n$.

(ii) Les **polynômes de BERNOULLI** vérifient les propriétés suivantes :

(a) relation intégro-différentielle :

(4) $P_{2n+1}' = (2n + 1) . P_{2n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$;

(b) développement en série :

(5) $P_n(x) = (n+1)^{-1} x^{n+1} - (1/2) x^n + (1/2) C_n^1 B_1 x^{n-1} - (1/4) C_n^3 B_2 x^{n-3} + ...$,

où les nombres B_n sont appelés **nombres de J. BERNOULLI**.

Ces nombres sont aussi définis selon :

(6) $1 - (x / 2) . \mathrm{cotg}(x / 2) = \Sigma_{n=1}^{+\infty} B_n . x^{2n} / (2n)!$, avec $|x| < 2\pi$,

ou encore selon :

(7) $t / (1 - e^t) = -1 + (t / 2) + \Sigma_{n=1}^{+\infty} (-1)^n . B_n . t^{2n} / (2n)!$.

On montre notamment que :

(8) $1 + 2^{-2n} + 3^{-2n} + ... = 2^{2n-1} . \pi^{2n} . B_n / (2n)!$;

(iii) Ainsi, les premiers polynômes de BERNOULLI sont :

$P_0(x) = x - 1$,

(9) $\quad P_1(x) = x\,(x - 1) / 2,$

$\quad P_2(x) = x\,(2\,x^2 - 3\,x + 1) / 6,$

etc.

(iv) On définit parfois les **polynômes de BERNOULLI** de façon équivalente à partir de l'expression :

(10) $\quad (t, x) \mapsto f(t, x) = (e^t - 1)^{-1} \,.\, t \,.\, e^{t\,x}.$