POLYNOMES DE HERMITE (A10, C7)
(15 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Les **polynômes de HERMITE** constituent une **famille** de **polynômes orthogonaux** dont la **fonction de poids** est de forme gaussienne (cf **loi gaussienne**).

(i) La **fonction numérique** f : $\mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ définie selon :

(1) $(t, x) \mapsto f(t, x) = \exp\{-(t^2 - 2 . t . x) / 2\}$

admet, $\forall$ t $\in$ **R** , un développement en série entière, parfois appelé **développement de C. HERMITE**, de la forme :

(2) $f(t, x) = P_0(x) + t . P_1(x) + ... + t^n . \{P_n(x) / n!\} + ... = \Sigma_{n=0}^{\infty} t^n . \{P_n(x) / n!\}$.

Le n-ième terme P_n définit un **polynôme de C. HERMITE**, ou **polynôme de P.L. CHEBICHEV - C. HERMITE**.

C'est aussi le cas de l'**équation différentielle** suivante :

(3) $P_n(x) = (-1)^n \exp(x^2 / 2) . (d^n / dx^n) \{\exp(x^2 / 2)\}$.

(ii) Les polynômes de HERMITE vérifient les propriétés suivantes :

(a) développement général :

(4) $P_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2} + 1 . 3 . C_n^4 x^{n-4} - 1. 3. 5 . C_n^6 x^{n-6} + ...,$

$\Sigma_{j=0}^{\infty} (-1)^j \{1 . 3 ... 2j-1\} . C_n^{2j} . x^{n - 2j}$.

où C_a^b désigne un coefficient binômial (cf **combinaison**).

En particulier, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - 1$, etc ;

(b) équation intégro-différentielle :

(5) $P_{n+1}(x) = x . P_n(x) - n . P_{n-1}(x) = x . P_n(x) - P_n'(x)$;

(c) équation différentielle :

(6) $P_n''(x) - x . P_n'(x) + n . P_n(x) = 0$.

(iii) La suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ peut être transformée en suite orthogonale (cf **polynômes orthogonaux**). Les **polynômes orthogonaux de C. HERMITE**, ou **fonctions orthogonales de C. HERMITE**, sont alors définis comme les termes de la suite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant :

(7) $H_n = \{n\,!\,(2\,\pi)^{1/2}\}^{-1/2} \,.\, P_n$.

En effet, cette suite vérifie la propriété suivante :

(8) $$\int P_n(x)\,.\,\exp(-x^2/2)\,.\,P_\alpha(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq n, \\ n\,!\,(2\,\pi)^{1/2} & \text{si } \alpha = n. \end{cases}$$

(iv) Les fonctions de HERMITE sont uniformément bornées : ie il existe un réel $M \in \mathbf{R}^*_+$ tq, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, on ait $\sup_{x \in \mathbf{R}} |H_n(x)| \leq M$. D'autre part, $\forall\, \beta > 1/4$, il existe un réel $\alpha > 0$ tq, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\int_{\mathbf{R}} |H_n(x)|\,dx \leq \alpha\,.\,n^\beta$.

(v) On définit parfois les **polynômes de HERMITE** de façon légèrement différente, la relation (1) étant remplacée par la suivante :

(1)' $(t, x) \mapsto f(t, x) = \exp\{-(t^2 + 2\,.\,t\,.\,x)\}$,

et la suite $(P_n)_n$ étant définie par $f(t, x) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} (H_n(x) / n\,!)\,.\,t^n$.

Par suite, on obtient les relations (ou propriétés) :

(a) $P_n(-x) = (-1)^n\,.\,P_n(x)$;

(b) $P_{n+1}'(x) = -2\,.\,(n+1)\,.\,P_n(x)$;

(c) $P_{n+1}(x) + 2\,x\,.\,P_n(x) + 2\,n\,.\,P_{n-1}(x) = 0$.

Cette seconde définition conduit à la définition des polynômes orthogonaux. En effet, la suite $(H_n)_n$ définie par les polynômes :

(9) $H_n(x) = 2^{-n/2}\,.\,(n\,!)^{-1/2}\,.\,\pi^{-1/4}\,.\,P_n(x)$

est une suite orthogonale dans l'espace $L_{\mathbf{R}}^2(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, \mu)$, où la **mesure** μ possède une **densité** (**dérivée de NIKODYM-RADON**) de type gaussien, ie :

(10) $\mu(B) = \int \mathbf{1}_B(x)\,.\,\exp\{-x^2\}\,dx, \quad \forall\, B \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$.