**POLYNÔMES DE LEGENDRE (A10, C7)**
(09 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Les **polynômes de LEGENDRE** constituent une famille de **polynômes orthogonaux** dont la **fonction de poids** correspond à une **densité** de type uniforme (cf **loi uniforme**).

(i) La **fonction numérique** f définie par :

(1) $(t, x) \mapsto f(t, x) = (1 - 2 . t . x + t^2)^{-1/2}$

admet, $\forall$ t $\in$ **R** tq $|t| < 1$, un développement en série entière pr à t de la forme :

(2) $f(t, x) = P_0(x) + t . P_1(x) + ... + t^n . P_n(x) + ...$ ,

appelé **développement de A.M. LEGENDRE**.

Le n-ième terme $P_n$ est appelé **polynôme (sphérique) de A.M. LEGENDRE** et se définit aussi par la relation :

(3) $2^n . n ! P_n(x) = (d^n / dx^n) (x^2 - 1)^n$.

(ii) On établit les propriétés suivantes :

(a) le degré de $P_n$ est d° $P_n = n$, $\forall n \in$ **N** ;

(b) **équation de récurrence** :

(4) $n . P_n(x) - (2 n - 1) . x . P_{n-1}(x) + (n - 1) . P_{n-2}(x) = 0$.

En particulier, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3 x^2 - 1) / 2$ ;

(c) équation intégro-différentielle :

(5) $(x^2 - 1) . P_n''(x) + 2 . x . P_n'(x) - n . (n + 1) . P_n(x) = 0$.

(iii) On appelle **suite des polynômes orthogonaux de LEGENDRE** la **suite** $(L_n)_n$ définie à partir des polynômes précédents selon :

(6) $L_n = \{n + (1 / 2)\}^{1/2} . P_n$ , $\forall n \in$ **N**.