PONT BROWNIEN (N2)
(24 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$, où $T = R_1 = [0, 1]$, un **processus stochastique** réel scalaire. On suppose que X est :

(a) à **trajectoires** continues ($t \mapsto X_t \in \mathcal{C}_\infty (T)$) ;

(b) un **processus du second ordre** (ie tq $E \|X\|_\infty^2 < +\infty$, avec $\|X\|_\infty^2 = \sup_{t \in T} |X_t|$) ;

(c) centré ($E X_t = 0$, $\forall t \in T$) ;

(d) un **processus continu** en moyenne quadratique (cf **processus continu dans L^p** avec p = 2).

On note $\gamma : T^2 \mapsto \mathbf{R}$ sa **fonction d'autocovariance** $(s, t) \in T^2 \mapsto \gamma (s, t) = C (X_s , X_t)$.

On dit alors que X est un **(processus du) pont brownien** (cf aussi **processus du pont brownien**) ssi :

(a) $X_0 = 0$;

(b) la loi P^X de X est une **loi gaussienne** ;

(c) γ est de la forme :

(1) $\gamma (s, t) = s \wedge t - s t$, avec $s \wedge t = \inf (s, t)$, $\forall (s, t) \in T^2_\leq$,

où $T^2_\leq$ désigne l'ensemble $\{(s , t) \in T^2 : s \leq t\}$.

La fonction de covariance γ s'écrit aussi (cf **processus du mouvement brownien**) :

(1)' $\gamma (s , t) = s (1 - t)$, $\forall (s , t) \in T^2_\leq$.

(ii) On montre que la continuité en moyenne quadratique de X équivaut à la **continuité** (simple) de γ sur T^2 .