PRÉDICTEUR BAYÉSIEN (G3, G10)

(i) Soit ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle image** dans lequel $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille de lois dominée** par une **mesure positive** μ. Soit $\mathscr{B}_\Theta$ une **tribu de parties** de Θ et Π une **loi a priori** définie sur $\mathscr{B}_\Theta$, dont la **densité** pr à une **mesure positive** ν est notée π. Soit Y : $\Omega \mapsto \mathscr{Y}$ une **va** définie sur le même espace (Ω, $\mathscr{T}$) que X et à valeurs dans un espace auxiliaire ($\mathscr{Y}$, $\mathscr{C}$). On note $g_{Y/X}$ la **densité de prévision** de Y sachant X.

On considère le **problème de décision** statistique tq :

(a) l'**ensemble** des décisions (**prévisions** ou « **prédictions** ») D est $\mathscr{Y}$ lui-même ;

(b) à chaque couple (d, y) $\in$ D x $\mathscr{Y}$ on associe une valeur u (d, y) $\in$ **R**, ce qui définit une **fonction d'utilité** ou, alternativement, une **fonction de perte**, u pour le **statisticien** (cf aussi **utilité**).

(ii) On appelle alors **prédicteur de T. BAYES**, ou **prédicteur bayésien**, (**ponctuel**) de Y une **règle de décision** δ tq :

(1) $\delta : \mathscr{X} \mapsto D$.

On dit que d est un **prédicteur bayésien optimal** (pour u), ou un **prédicteur u-optimal**, ssi le **problème d'optimisation** suivant :

(2) $S(\tilde{d}) = \sup_{d \in D} S(d)$, où $S(d) = \int u(d, y)\, g_{Y/X}(y)\, dy$,

admet une solution (unique) $\tilde{d}$.

(iii) On appelle **prédicteur de T. BAYES**, ou **prédicteur bayésien**, (**ensembliste**) de Y une règle de décision δ tq :

(3) $\delta : \mathscr{X} \mapsto \mathscr{C}$.

On dit que la **prédiction ensembliste** C $\in$ $\mathscr{C}$ est un « **recouvrement »** de niveau $\alpha \in]0, 1[$ de Y ssi :

(4) $\int_C g_{Y/X}(y)\, dy = \int_C g(y / X = x)\, dy = \alpha$, μ-p.p..

On appelle **recouvrement de T. BAYES**, ou **recouvrement bayésien**, de $\delta : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C}$ toute statistique $R = r \circ X : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par :

(5) $$r(x) = r(X(\omega)) = \int_{\delta(x)} g(y / X = x)\, dy, \qquad \mu\text{-p.p.}.$$

Le **recouvrement moyen** de δ est alors défini selon :

(6) $$\bar{r} = \int_{\mathcal{X}} r(x)\, f_X(x)\, d\mu(x),$$

où $f_X(x) = \int_\Theta f(x, \theta)\, d\Pi(\theta)$ désigne la densité de la loi propre (ie **loi marginale**) de X et $f(x, \theta) = (dP_\theta^X / d\mu)(x)$ (**vraisemblance** du modèle).