PRÉDICTION (G10, N6)
(05 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit (Ω, $\mathcal{T}$, $\mathcal{P}$) un **modèle statistique**, ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$) et ($\mathcal{X}^*$, $\mathcal{B}^*$) deux **espaces mesurables** auxiliaires (eg **espace des observations**), ainsi que deux **éléments aléatoires** :

(1) $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ et $X^* : \Omega \mapsto \mathcal{X}^*$,

dont le premier X est supposé **observable** et le second X* **inobservable**.

Le problème général de la **prédiction** basée consiste à « estimer » l'élément X* au moyen de l'élément observable X (cf aussi **prévision**).

(ii) On dit que X est un **élément aléatoire maximal** ssi tout autre élément $X' : \Omega \mapsto X$ dépend de X, ie ssi il existe une **application mesurable** $\phi : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ tq $X' = \phi\,(X)$.

(iii) On appelle :

(a) **prédicteur pur**, ou **prédicteur « déterministe »**, **ponctuel** de X* toute application $\delta : \text{Im } X \mapsto \text{Im } X^*$ (cf **image d'une application**, **image d'une statistique**). En pratique, le **statisticien** se restreint souvent à une **partie** stricte Δ de l'**ensemble** de tous les prédicteurs δ de X* ;

(b) **prédicteur pur**, ou **prédicteur « déterministe »**, **ensembliste** de X* toute application $D : \text{Im } X \mapsto \mathcal{T}\,(\text{Im } X^*)$ définie en remplaçant Im X* par une **tribu de parties** $\mathcal{T}\,(\text{Im } X^*)$ de Im X*.

(iv) On considère une **fonction de perte** $L : \mathcal{X}^* \times \text{Im } X^* \mapsto \mathbf{R}_+$ tq :

(2) $(X, X^*) \mapsto L\,\{X^*, \delta\,(X)\}$,

vérifiant la propriété usuelle $L\,\{X^*, \delta\,(X)\} = 0$ si $\delta\,(X) = X^*$.

Le **décideur** (**homme de l'art** ou **statisticien**) prend une **décision optimale** , ie une **prédiction optimale**, ssi il prend la **décision** (ie la prédiction) $d = \delta\,(X)$ qui minimise la **fonction de risque** suivante, associée à L :

(3) $R\,(\delta) = E_P\, L\,\{X^*, \delta\,(X)\}, \quad \forall P \in \mathcal{P}$,

expression dans laquelle $E_P\, \varphi\,(X, Y) = \int_\Omega \varphi\,(X, Y)\, dP$.

(v) Un **problème de prédiction** se représente parfois à l'aide de l'assemblage $\{(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P}), X, X^*, L, \Delta\}$ ou $\{(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P}), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (\mathcal{X}^*, \mathcal{B}^*), R, \Delta\}$.