

PRESQUE PARTOUT, PRESQUE SÛR (A5, B1, C4, G2)

(24 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un **espace mesuré**.

On dit qu'une **propriété** Pr définie sur E est une **propriété vraie presque partout**, ou une **propriété vérifiée presque partout**, pour (ou pr à) μ , ou **μ -presque partout**, dans (ou sur) E ssi l'**ensemble** :

$$(1) \quad N = \{x \in E : Pr(x) \text{ est fausse}\}$$

est négligeable pour μ (ie $\mu(N) = 0$) (cf **partie négligeable**).

On note Pr μ -p.p..

A titre d'exemple, si $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite d'applications** $f_n : E \mapsto F$, alors f converge μ -presque partout vers l'application $f_\infty : E \mapsto F$ ssi l'ensemble :

$$(2) \quad \{x \in E : \lim_n f_n(x) \neq f_\infty(x)\}$$

est μ -négligeable (cf **convergence presque partout**).

(ii) En particulier, si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace probabilisé** noté $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit plutôt que Pr est une **propriété vraie presque sûrement** pour (ou pr à) P , ou **P-presque sûrement**.

On note Pr P -p.s..

Lorsque P est dominée par une mesure μ (ie lorsque $P \prec \mu$), le fait que Pr soit vraie μ -p.p. entraîne sa véracité P -p.s. (cf **dérivée de NIKODYM-RADON**).

(iii) Enfin, si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ est un **modèle statistique**, on dit qu'une propriété Pr définie sur Ω est vraie **presque sûrement** pour (ou pr à) $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P}$ -presque sûrement) ssi elle est vraie P -p.s. pour toute $P \in \mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P}$ est une **famille de lois dominée** par une mesure μ , le fait que Pr soit vraie μ -p.p. entraîne que Pr est vraie P -p.s..